

地学実験 I. 「気圧・湿度の測定」メモ

2006.6.10 長島雅裕 (長崎大学教育学部)

1 気圧の測定

フォルトン型水銀気圧計 (Fortan mercury barometer) を使って気圧を測定する。

1.1 はじめに

気圧とは大気の圧力である。大気に圧力があることを最初に示したのはイタリアの物理学者、トリチェリ (Evangelista Torricelli) で、1643 年であった。一方を密封した管に水銀を入れ、それを水銀溜めの中に入れて逆さに立てると、管の中の水銀はある高さまで下がり止まることを示した。その時の高さは水銀溜めの表面から約 760mm であった。これは、大気に圧力が働いており、水銀柱を 760mm の高さに押し上げる圧力があることを示している (図 1)。

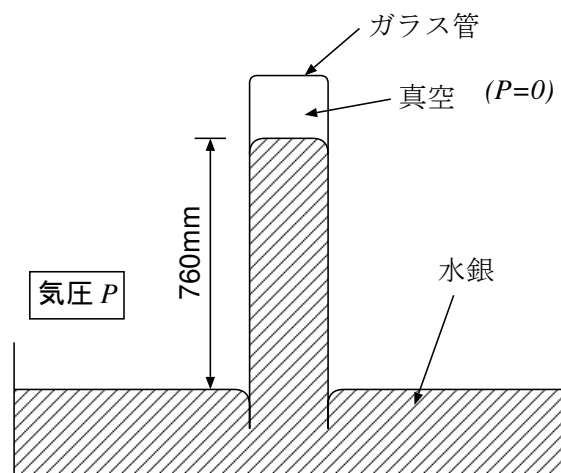


図 1: トリチェリの実験

以下、水銀柱の高さからなぜ気圧が測定できるのか、及び実際に気圧を測定するための具体的な過程について示す。

1.2 原理

気圧が支えることのできる水銀の量を測ることにより、その気圧を求めることができる。気圧を P 、ガラス管内の水銀の高さを h 、水銀の質量密度を ρ 、重力加速度を g とする。ガラス管内の水銀より上は真空であるため圧力はゼロであるため、圧力差は $P - 0 = P$ である。管の太さを便宜上 S とすると、水銀を押し上げる力は PS となる。一方、高さ h の水銀柱の質量 M は $M = \rho h S$ であるので、この水銀柱にかかる重力は $Mg = \rho g h S$ となる。この二つの力が釣り合うので、 $PS = \rho g h S$ 、すなわち

$$P = \rho g h \quad (1)$$

となることがわかる。水銀の密度 $\rho (= 13.5951 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3})$, 重力加速度 g は既知であるので、 h がわかれば P がわかることになる。

実際の測定では、器具自体に含まれている誤差、温度による水銀や器具の膨張、場所による重力加速度の違い、高さによる気圧の変動などを考慮し、標準重力加速度のもとで、海面で温度 0°C の水銀が示す値に補正することになる。なおこれら補正については、「一般気象学」(小倉義光)に詳しい [1]。

1.3 単位

SI 単位系における圧力の単位はパスカル Pa であるが、気圧の単位としては通常ヘクトパスカル hPa を用いる。h は無論 100 倍を意味する (例: ヘクタールは 100 アール)。 1m^2 の面積に 1N の力が働く時の圧力が 1Pa であり、1N は 1kg の物体に 1m s^{-2} の加速度を与える力である。なお Pa ではなく hPa を使う理由は、1992 年 11 月までは気圧の単位としてミリバール mb を使用してきたが、hPa を使うと数値が同じになるためである。

今回使用する水銀気圧計では、気圧は水銀柱の高さで示されるため、水銀柱の高さが 1mm の時の気圧を 1mmHg と表わすのが便利である。hPa との関係は、

$$1\text{mmHg} = 1.333224\text{hPa}, \quad 1\text{hPa} = 0.750062\text{mmHg} \quad (2)$$

となる。なお、1 気圧 (=1atm) は $760\text{mmHg}=1013\text{hPa}$ である。

1.4 測定

1. 気圧計前面に付着している温度計 (付着温度計) による水銀の温度を読み取る。
2. 図 2(a) のネジ A を廻してナメシ皮の袋 B を押し上げ、取り付けであるルーペ E で覗きながら水銀 C の表面を象牙針 D の先端に合わせる。
3. 気圧計の右側についているネジを廻して図 2(b) の副尺 F を動かし、下端を水銀柱 G の上端に一致させる。副尺を使って気圧の値を 0.1mmHg まで読み取る。次の測定に便利のように A を一回転ほど戻し、水銀面を象牙針の先端から離しておく。
4. 時刻を記録する。

1.5 器差補正

Scale の零点のズレ等から、一般に測定器は「器差」を伴う。読み取り気圧を P_{raw} , 器差を ΔP とし、補正後の気圧を P_i とすると、

$$P_i = P_{\text{raw}} + \Delta P \quad (3)$$

となる。本実験室の気圧計では、器差補正として測定された値に対し、0.4 mmHg を減ずる。即ち、 $\Delta P = -0.4 \text{ mmHg}$.

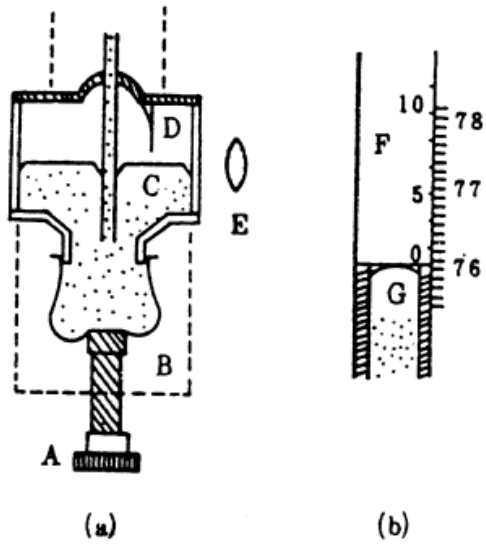


図 2: フォルタン水銀気圧計の構造。

1.6 温度補正

水銀、scale ともに温度によって膨張・収縮し、正しい値からズレが生じる。補正を行い、水銀温度 0°C における値に換算する。以下、付着温度計の温度を $t [^{\circ}\text{C}]$ とする。

温度補正値を C_t とし、温度補正後の圧力を P_t とすると、

$$P_t = P_i + C_t \quad (4)$$

である。水銀の体膨張係数を μ 、管の線膨張係数を λ とすると、水銀が膨張している場合は本当の気圧よりも高く表示され、逆に管が膨張している場合は低く表示されるので、補正前後の圧力の比は、

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{1 + \lambda t}{1 + \mu t} \quad (5)$$

となることがわかる。これより、温度補正値 C_t は、

$$C_t = -P_i \frac{(\mu - \lambda)t}{1 + \mu t} \quad (6)$$

となる。ここで、 $\mu = 0.0001818 [^{\circ}\text{C}^{-1}]$, $\lambda = 0.0000184 [^{\circ}\text{C}^{-1}]$ である。図 3 に、温度補正値を示す。

1.7 重力補正

水銀気圧計の原理から、重力加速度が変化すると、気圧計の示す値も変化する。そこで、標準の重力加速度 ($g_0 = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$) における値に補正する。

重力補正後の気圧を P_g 、補正値を C_g とすると、

$$P_g = P_t + C_g \quad (7)$$

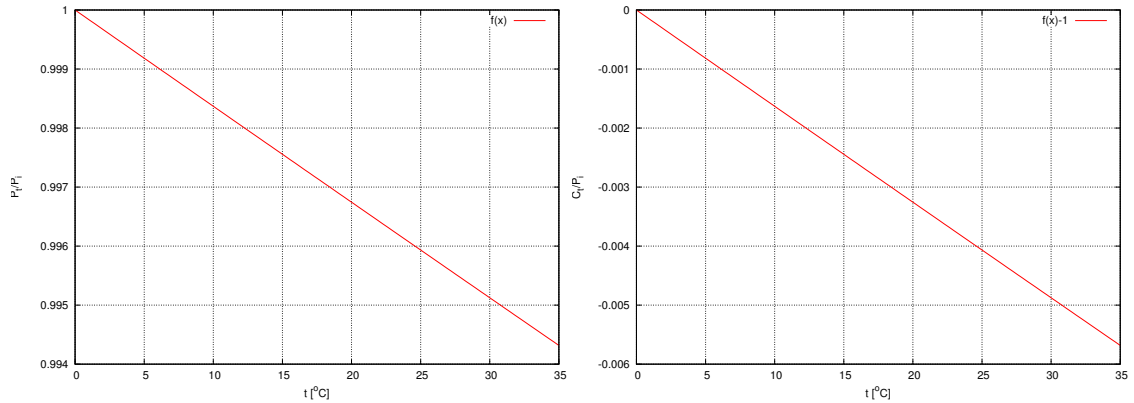


図 3: 温度の関数としての温度補正值。

である。補正前後の気圧の比は、水銀柱の高さが重力加速度に反比例することから、

$$\frac{P_g}{P_t} = \frac{g}{g_0} \quad (8)$$

となる。従って、

$$C_g = P_g - P_t = P_t \frac{g - g_0}{g_0} \quad (9)$$

と求められる。なお、長崎に於ける重力加速度は、理科年表 2006 年度版によると、 $g = 9.7958803 \text{ m s}^{-2}$ である。

1.8 海面補正

気圧は海面からの高度とともに変化する。静水圧平衡を仮定すると、

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (10)$$

が成り立つ。理想気体の状態方程式、 $P = nk_B T$ は、乾燥空気の気体定数 $R = 287.05 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ¹ を用いて

$$P = \rho R T \quad (11)$$

と書け、これより式 (10) は

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Pg}{RT} \quad (12)$$

となる。ここで温度は絶対温度であることに注意 ($T = t + 273.15 \text{ [K]}$)。

海面 ($z = 0$) での圧力を P_0 として解くと、

$$\ln \frac{P_0}{P(z)} = \frac{1}{R} \int_0^z \frac{g}{T} dz \quad (13)$$

であるが、簡単のために g を一定であるとし、観測地での値を使う。また平均温度

$$T_m \equiv \frac{z}{\int_0^z \frac{dz}{T}} \quad (14)$$

¹単純に、¹⁴N₂78%、¹⁶O₂21%、⁴⁰Ar 1%とすると、287.1になる。

を導入すると、

$$\ln \frac{P_0}{P(z)} = \frac{gz}{RT_m} \quad (15)$$

より、

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_m}\right) \quad (16)$$

を得る。測定された高度 z での気圧 $P(z)$ が P_g に対応し、あとは \exp のべき指数がわかれば海面での気圧 P_0 を求めることができる。

平均気温 T_m は、

$$T_m = 273.15 + t_m + \varepsilon_m \quad (17)$$

と書ける。ここで t_m は気柱の平均気温である。観測地点の気温 t に対し、気温の高度による変化が $0.5^\circ\text{C}/100\text{m}$ であると仮定すると、

$$t_m = t + 0.005Z/2 = t + 0.0025Z \quad (18)$$

となる。

さらに空気の湿り気具合による補正が ε_m である。これは、

$$\varepsilon_m = At_m^2 + Bt_m + C \quad (19)$$

として、温度によって以下のように係数 A, B, C が与えられている。

温度範囲	A	B	C
$t_m < -30.0$	0	0	0.090
$-30.0 \leq t_m < 0.0$	0.000489	0.0300	0.550
$0.0 \leq t_m < 20.0$	0.002850	0.0165	0.550
$20.0 \leq t_m < 33.8$	-0.006933	0.4687	-4.580
$33.8 \leq t_m$	0	0	3.340

海面補正後の圧力 P_0 が、求めるべき気圧である。

図 5 に、海面補正値を示す。

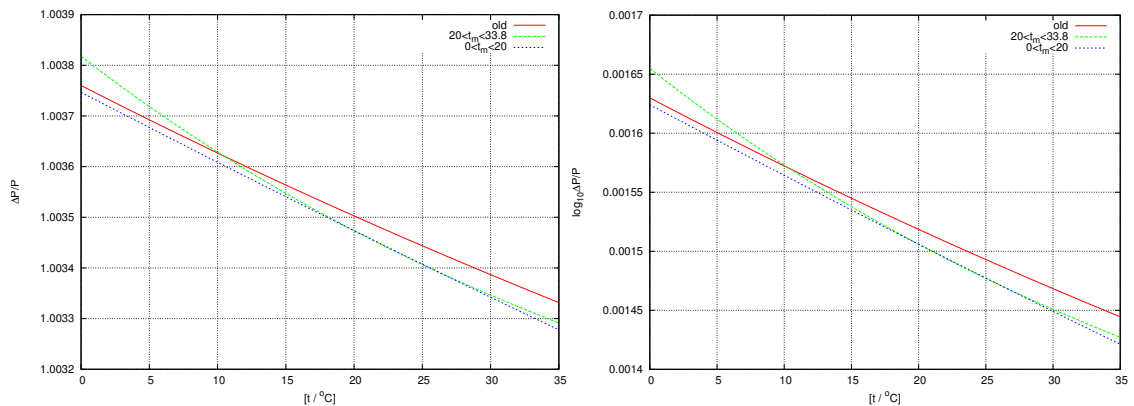


図 4: 温度の関数としての温度補正値。

2 湿度の測定

アスマン通風乾湿計を用いて、大気の湿度を測定する。

2.1 はじめに

空気中には常に水蒸気が含まれている。水蒸気の量によって雨や雪が降り、また雲となって空気中に浮かぶ。また水蒸気は赤外線を吸収・放射する作用があり、大気の放射量の変動をもたらす原因になっている。

空気の乾湿の度合を湿度 (正確には相対湿度 $R[\%]$) と言い、次式により定義される。

$$R = \frac{e}{e_s} \times 100 \quad (20)$$

ここで e は空気の水蒸気圧、 e_s は飽和水蒸気圧である。空気を含むことのできる最大の水蒸気量の時の水蒸気圧が飽和水蒸気圧であり、このとき、水は蒸発しなくなる。

2.2 アスマン通風乾湿計

二本の温度計がついており、片方の球部をガーゼで覆い、湿らせてある。湿らせてある方を湿球、何もつけていない方を乾球と言う。上部にゼンマイ式 (電動式のものもある) の通風装置が付いており、球部に一定速度 (風速 5m/s 程度) で風が当たるようになっている。

湿度により、湿球を覆うガーゼから水が蒸発する速度が変化する。蒸発の際には熱を奪うため、湿球の温度を下げることになる。従って、どれくらい温度が下がるかが湿度に依存し、乾球との温度差から湿度を求めることができる。

2.3 測定

測定数分前にスポイトを用いてガーゼを濡らし、通風を開始する。湿球の温度が安定したら、湿球、乾球のそれぞれの温度を読み取る。両者の器差補正を行う。

2.4 湿度を求める

水蒸気圧 e は、以下のスプリング (Sprung) の式を用いて求めることができる。

$$e = e_s(t_w) - \frac{A}{755} P(t_d - t_w) \quad (21)$$

ここで t_d, t_w はそれぞれ乾球、湿球の温度、 $e_s(t_w)$ は湿球の温度 t_w に対応する飽和水蒸気圧、 P は気圧、 A は通常は 0.50、湿球が氷結している場合は 0.44 とする。蒸気圧 e, e_s 及び気圧の単位は mmHg でも hPa でも良いが、揃えておくこと。

この式の物理的意味は Appendix A に示した。

次に飽和水蒸気圧 e_s を求める。飽和水蒸気圧を求める式には数種類あるが、ここでは低温域でよく実験値と合うティテン (Tetens, 1930) の近似式を用いることにする：

$$e_s(t) = 6.11 \times 10^{at/(b+t)} \text{ [hPa]} \quad (22)$$

ここで $a = 7.5, b = 237.3$ である。 $t = 0^\circ\text{C}$ の時に正しい値 (誤差ゼロ) となるように作られている。
 $t = 100^\circ\text{C}$ では誤差は 1%弱となるが、実際の気象現象ではそのような高温を扱うことはほぼないので十分実用となる。

この式の物理的意味は Appendix B に示した。

以上より、相対湿度は

$$R = \frac{e}{e_s(t_d)} \times 100 \quad (23)$$

となる (乾球温度に対する飽和水蒸気圧を用いることに注意)。

2.5 露点温度

ある温度 t で蒸気圧が e 、相対湿度 R の空気を考えよう。この時 $R < 100\%$ であったとしても、空気の温度が下がると飽和水蒸気圧が下がり、相対湿度が 100% に達し、空気が飽和し、水滴が析出する。この時の温度を露点温度と呼ぶ。

露点温度を t_{dew} と置くと、定義により

$$e_s(t_{\text{dew}}) = e \quad (24)$$

である。

A 湿度計方程式

ガーゼを通過した気体は、蒸発に伴う潜熱を奪われるため温度が T_d から T_w に下がる。温度低下に伴う空気の単位体積当たりのエネルギーは、等圧変化とみなせるので、

$$\rho_d C_p (T_d - T_w) \quad (25)$$

と書ける。ここで ρ_d は乾燥空気の質量密度である。一方、単位質量の水が水蒸気として蒸発する際に奪う熱量 $L = 2.50 \times 10^6 \text{ [J kg}^{-1}\text{]}$ を用いると、単位体積当たりに奪う熱量は

$$(\rho_{v,s} - \rho_v) L \quad (26)$$

となる。ここで $\rho_v, \rho_{v,s}$ は、それぞれ水蒸気の質量密度、飽和水蒸気の質量密度である (つまり、ガーゼを通して飽和した水蒸気が、蒸発して周囲の蒸気圧になるまでに奪う熱量を求めたことになる)。これらは等しい筈なので、

$$(\rho_{v,s} - \rho_v) L = \rho_d C_p (T_d - T_w) \quad (27)$$

という等式が成り立たねばならない。

一方、乾燥空気と水蒸気の混合気体の圧力を P とし、水蒸気分圧を e とすると、それぞれが理想気体の状態方程式に従うので、

$$e = \rho_v R_v T \quad (28)$$

$$P - e = \rho_d R_d T \quad (29)$$

である。ここで気体定数の定義に戻って考えると、

$$\frac{R_d}{R_v} = \frac{M_v}{M_d} \equiv \varepsilon = 0.622 \quad (30)$$

となることわかる。二つの状態方程式の比を取ると、

$$\frac{e}{P-e} = \frac{\rho_v R_v}{\rho_d R_d} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho_v}{\rho_d} \quad (31)$$

であるが、 $e/P < 0.04$ であるので、左辺の分母は $P - e \simeq P$ と近似して構わない。よって、

$$\frac{e}{P} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho_v}{\rho_d} \quad (32)$$

となる。同様に、飽和水蒸気分圧を e_s とすると、

$$\frac{e_s}{P} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho_{v,s}}{\rho_d} \quad (33)$$

となる。

これを式 (27) に代入すると、

$$e = e_s - \frac{C_p}{\varepsilon L} P(T_d - T_w) = \frac{C_p}{\varepsilon L} P(t_d - t_w) \quad (34)$$

となる。なお、最後の等式は、温度を絶対温度 T から摂氏 t への変形であるが、基準点の変更は差を取っているのでキャンセルする。

実際の測定では、ガーゼからの水の蒸発に伴う湿度の上昇による誤差やガーゼ自体の汚れ、測定者による温度上昇、水の純度、等々、様々な誤差要因がある。そこで、上の式を

$$e = e_s - AP(t_d - t_w) \quad (35)$$

と一般化し、実験により A を求めている (湿度計方程式、乾湿計公式、あるいは Sprung の式)。JIS 規格では湿球が氷結していない時は $A = 6.62 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ となっており、理論式とは若干ズレている。ただし、国際的には A の値はまだ確定していない [6]。

B 飽和水蒸気圧

まずクラウジウス-クラペイロンの式を導き、それを用いて飽和水蒸気圧を求める式を導出する。

B.1 初等的な方法

最初に熱力学第一法則のみを用いた方法を示す [2]。以下、物理量は単位質量当たり、即ち質量密度 ρ で規格化した量である。単位質量が占める体積として $v = 1/\rho$ と置いておく。

熱力学第一法則より、

$$d'Q = TdS = du + edv \quad (36)$$

である。ここで e は水蒸気圧である。飽和している時 ($e = e_s$)、 T, e_s 一定で水から水蒸気へ相を変化させると、 $dS = S_v - S_l$ などとして (添字 v, w はそれぞれ水蒸気 [vapor]、水 [liquid] を示す)、

$$T(S_v - S_l) = u_v - u_l + e_s(v_v - v_l) \quad (37)$$

である。各相についてまとめると、

$$u_l + e_s v_l - T S_l = u_v + e_s v_v - T S_v \quad (38)$$

また、当然 $T + dT, e_s + de_s$ 一定での変化も考えられ、上と同様にし、かつ2次の微小量を無視すると、

$$du_l + e_s dv_l + v_l de_s - S_l dT - T dS_l = du_v + e_s dv_v + v_v de_s - S_v dT - T dS_v \quad (39)$$

となる。ここで上の式(38)の関係を用いた。さらに第一法則 $TdS = du + e_s dv$ を用いると、

$$v_l de_s - S_l dT = v_v de_s - S_v dT \quad (40)$$

となる。

ここで、熱の変化は潜熱に相当するので、

$$S_v - S_l = \frac{d'Q}{T} = \frac{L}{T} \quad (41)$$

となるから、これを使うと

$$de_s = \frac{L}{T(v_v - v_l)} dT \quad (42)$$

となることがわかる。これをクラウジウス-クラペイロンの式と言う。

B.2 Gibbs の自由エネルギー、化学ポテンシャルを使う方法

詳細は [3] 参照のこと。

2相が平衡状態であるためには、 T, P に加え化学ポテンシャル μ が等しいことが条件である。つまり、

$$\mu_l(P, T) = \mu_v(P, T) \quad (43)$$

でなければならない。前節と同様、 $P + dP, T + dT$ でもこれは成り立たなければならないので、

$$\mu_l(P + dP, T + dT) = \mu_v(P + dP, T + dT) \quad (44)$$

である。これを一次まで展開し、 P, T の時の式を引くと、

$$\left(\frac{\partial \mu_l}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial \mu_l}{\partial T}\right)_P dT = \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial T}\right)_P dT \quad (45)$$

となる。まとめると、

$$\left[\left(\frac{\partial \mu_l}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial P}\right)_T\right] dP = -\left[\left(\frac{\partial \mu_l}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial \mu_v}{\partial T}\right)_P\right] dT \quad (46)$$

となる。

次に、Gibbs の自由エネルギーは $n\mu$ であるが、単位質量あたりを考えると μ になる。この時、

$$d\mu = v dP - S dT \quad (47)$$

であるので、 dP, dT の係数より

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = v, \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P = -S \quad (48)$$

であることがわかる。これを使うと、

$$(S_v - S_l)dT = (v_v - v_l)dP \quad (49)$$

となり、クラウジウス-クラペイロンの式

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_v - S_l}{v_v - v_l} \quad (50)$$

を得る。

B.3 平衡曲線

次に、クラウジウス-クラペイロンの式を使って、平衡状態で (P, T) を変化させた曲線、すなわち平衡曲線を求める。

単位質量当たり水の占める体積 v_l は、明らかに水蒸気の体積 v_v に比べてずっと小さい ($v_v \gg v_l$)。従って、 $v_v - v_l \simeq v_v$ と近似でき、これより

$$de_s = \frac{L}{Tv_v} dT \quad (51)$$

となる。さらに水蒸気の状態方程式

$$e_s v_v = R_v T \quad (52)$$

を使うと、

$$\frac{de_s}{e_s} = \frac{L}{R_v} \frac{dT}{T^2} \quad (53)$$

となる。

潜熱 L の温度依存性は無視できるので、これを積分すると、

$$\ln e_s = -\frac{L}{R_v} \frac{1}{T} + C \quad (54)$$

(C は積分定数) となり、さらに変形して

$$e_s = C' \exp\left(-\frac{L}{R_v T}\right) \quad (55)$$

を得る。

ここで $t = 0^\circ\text{C}$, すなわち $T = 273.15\text{K}$ の時の飽和水蒸気圧は 6.11 hPa であることが実験により測定されている。従って、

$$6.11\text{hPa} = C' \exp\left(-\frac{L}{R_v 273.15\text{K}}\right) \quad (56)$$

より

$$C' = 6.11\text{hPa} \times \exp\left(\frac{L}{R_v 273.15\text{K}}\right) \quad (57)$$

つまり、

$$e_s = 6.11\text{hPa} \times \exp\left(-\frac{L}{R_v} \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right]\right) \quad (58)$$

となる。ここで $T_0 = 273.15\text{K}$ である。

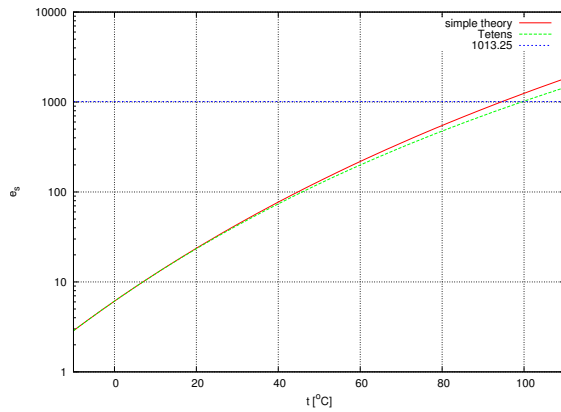


図 5: 温度の関数としての飽和水蒸気圧。実験値は、 $t = 0^{\circ}\text{C}$ で 6.11 hPa, 100°C で 1013.25 hPa である。

参考文献

- [1] 小倉義光、「一般気象学」第 2 版、東京大学出版会、1999 年。
- [2] 二宮洸三、「気象がわかる数と式」オーム社、2000 年。
- [3] 小出昭一郎、「熱学」、東京大学出版会、1980 年。
- [4] 「気象観測の手引」気象庁、1998 年 9 月制定、2002 年 10 月改訂。
<http://www.kishou.go.jp/know/より入手可能>。
- [5] http://www.okinawa-jma.go.jp/ishigaki/school/kis_home.htm
- [6] 稲松照子、「湿度計測に関する規格とトレーサビリティの最近の動向(その2)」、1996年、ES-PEC 技術情報、No.6、p.1。
http://www.espec.co.jp/tech-info/tech_info/index.html