

三角関数とフーリエ変換

2007/6/18 長島雅裕

1. はじめに

今回は、画像処理や微分方程式を解くなど様々な分野で使われている「フーリエ(Fourier)変換」を題材に、エクセルの使い方を学ぶ。フーリエ変換の講義を始めると長くなるので、ここでは概念だけを示し、「分布が波の重ね合わせで表現でき得る」ことだけ理解し、エクセルの使い方として乱数の発生や三角関数の使い方、他のセルの参照、グラフの作成、などを学ぶ(画像処理なら輝度分布を様々な波長の波に分解し、波ごとに加工して再合成することで、ぼやけた画像をつくったりできる)。フーリエ変換について勉強したい場合は、専門書を参照すること。

2. フーリエ変換とは

例えば風にそよぐ水面の波は複雑な形をしている。あるいはモノクロの写真は、印画紙上の各点での明るさの違いの集積とみなせば、「明るさの複雑な波」と見ることも出来よう。このような波を解析したい場合は多々あり、たとえば画像処理がいい例である。写真をパソコンに取り込むと、写真の画像を加工することができる。簡単な例は、わざとピンボケ写真にすることだろう(顔など画像の一部だけをボカすのでも同じ)。これはどうやってやるのだろうか？

フーリエ変換の概念は、明るさの空間分布などを、いろいろな波長の三角関数で表されるシンプルな波の重ね合わせと見ることである。簡単に書くと、

$$f(x) = \sum_k \tilde{f}_k e^{-ikx}$$

のようになる。ここで k は波数であり、 λ を波長とすると、 $k=2\pi/\lambda$ となる。これより $kx=2\pi(x/\lambda)$ であるので、一波长すすむと \cos の中身に 2π が足され、元の値に戻るわけである。 \cos の係数は波の振幅である。これは、もとの $f(x)$ を使って、

$$\tilde{f}_k \approx \int f(x) e^{ikx} dx$$

のような形で求めることが出来る。つまり、 x 空間上での分布(輝度などの) $f(x)$ が、 k 空間上での波の振幅の分布 \tilde{f}_k に置き換わったわけである(x 方向のみの一次元の分布で説明したが、画像の場合は当然 x, y 方向の2次元となる)。ここでは情報のロスはない。 $f(x) \rightarrow \tilde{f}_k$ と変換し、たとえば短波長(大きい k) の振幅をわざと減らして $f(x)$ を再合成すると、短波長の波がなくなっているため、全体としてぼやけた画像になる。なお、

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

である。

さて、今回はフーリエ変換そのものの習得が目的ではないので、「波の重ね合わせ」で複雑な波を作ることがわかればよいので、以下のように簡単化しよう。

$$f(x) = \sum_k a_k \cos(kx + \phi_k)$$

ϕ は位相であり、波の原点をずらしている。今回することは、

1. 各 k に対して乱数をふり、 ϕ_k をランダムに与える。
2. k の関数(k^n のべき)として a_k を与え、べき指数 n を変えると分布がどう変わるかを見る
3. 各 k の波(コサイン波)を足し上げ、色々な波を実現する。
4. これをグラフにする。

グラフにしたものを印刷して提出すること。

3. セットアップ

1. A5 のセルに 0 と書く(なぜ A5 かは以下でわかる)。区間は $[0, 2\pi]$ であるが、 2π は約 6.28 なので、0 から 6.3 まで 0.1 刻みで位置を与えよう。それには、A6 に 0.1 と書き、A5, A6 の両方を選択し、黒枠の右下をドラッグすればよい。6.3 になるまで下へ引っ張る。
2. k を与える。B4 に 1 と書き、上と同様に 1 刻みで $k=8$ まで与えよう。I4 まで右に引っ張る。
3. 位相 ϕ を与える。これはランダムに与えたい。ここで関数 RAND() を使う(引数はなし)。RAND() は、区間 $[0, 1)$ でランダムな値を返す関数である。いま欲しい乱数は、区間 $[0, 2\pi)$ で一様なので、B3 に $=6.28 * \text{RAND}()$ と書く。これで 0 ~ 6.28 のランダムな数値が得られる。これも黒枠の右下を右にドラッグし、 $k=8$ のところまで持っていく。これが、各 k に対するランダムな位相になる。

4. 振幅を与える。ここでは簡単に、振幅 a_k が k' に比例するとしよう。 n が正で大きければ短波長の波が卓越し、 n が負で大きければ長波長の波が卓越する。まず、B1 セルに n の数値を与えることにしよう。最初は1にとろう。つぎに B2 セルに、 $=B\$4^{\wedge}B\1 と書く。この意味を説明する。B\\$4 は、B4 セルを指定するものである。ただし、\$を付けておくと、他のセルにコピーした時にも4がそのまま保持される。B\\$1 も同様に、他のセルにコピーしてもこのセルの値を参照させるようにするためである。いま B4 は k の値、B1 は n の値が入っているので、これは k' を意味する。
5. このセル(B2)の黒枠を右に一つドラッグしよう。すると、C2 セルには、 $=C\$4^{\wedge}B\1 が入っていることが分かる。 $\$$ をつけていない部分だけが C に置き換わっている。これで、C 列の k に対して k' を与えることが出来た。あとは同様に右へドラッグしていき、 $k=8$ まで同様に与える。

以上で位置 x 、波の波数 k 、振幅 a_k 、位相 φ_k を与えることが出来た。これを使って、各 k 、各位置 x での値を求める。

1. 欲しい値を与える式は、 $\cos(kx+\varphi_k)$ であるので、B5 セルに $=B\$2*\text{COS}(B\$4* \$A5+B\$3)$ と書く。これはもちろん、最初の B\\$2 が振幅 a_k 、B\\$4 が k 、 $\$A5$ が x 、B\\$3 が位相 φ_k である。このセルの黒枠の右下を下にドラッグし、 $x=6.3$ まで持っていき。 $x=2\pi\sim 6.28$ で $x=0$ と同じ値になるはずなので、 $x=0$ の値と $x=6.2, 6.3$ での値を比較して、うまくいっているかチェックすること。
2. いま B5~B68 までのセルが黒枠に囲われているはずである。この黒枠の右下をドラッグし、そのまま $k=8$ まで持っていき。すると、 $k=1\sim 8$ のすべての波が実現できたはずである。
3. 最後に、これらの波を足し合わせる。いま、I 列まで値が入っているはずであるが、J 列に和を与えることにしよう。J5 セルに、 $=\text{SUM}(B5:I5)$ と打つ。黒枠を下にドラッグし、 $x=6.3$ まで持っていき。これで、重ねあわされた波を求めることが出来た。

4. グラフの作成

1. ツールバーの「グラフ ウィザード」ボタンをクリックする。ここでは x 軸の値が数値データとして与えられているので、「散布図」を選ぶ。マーカーなしの折れ線を選ぼう。「データ範囲」の右側をクリックし、A5~J68 までをドラッグし、範囲を選択する。選択したら小さいパネルの右側をクリックし、「次へ」「次へ」「完了」でグラフが表示される。
2. 和を計算したものについては強調して見たいので、和の線をクリックしよう(周期的なコサイン波でないのですぐにわかるはず)。線をダブルクリックして、「パターン」タブを開くと、線の太さや色を選べるようになるので、適当に強調して見えやすいものに変更し、OK を押す。見えやすいグラフになったはずである。
3. ここで F9 を押すと、乱数が振り直されるので、それに応じてグラフも変化する。何度か F9 を押してみ、揺らぎのパターンがどう変化するか、共通な特徴はなにか考えてみよう。

5. 振幅の波数依存性

最後に n を変えてみよう。

まず n を小さくしてみる。 $n=-2$ にしよう。すると、揺らぎはほとんどが最も波長の長い波の寄与でできていることがわかる。F9 を何回か押して確認してみよう。次に $n=2$ にする。すると、今度は長波長の波はほとんど寄与せず、短波長の波で揺らぎが決まっていることが分かる。短波長のわずかに波数の違う波同士で「うなり」が起きていることも分かるであろう。

このように、長波長の波と短波長の波のどちらの寄与が大きいかを知ることは、現実の現象を知る上では大事なことである。たとえばこの波が音波だとすると(この場合 x は時間になる)、 n が小さいことは低音成分の寄与が大きいことに相当し、 n が大きいと高音成分の音が強調されることを意味する。つまり、 n を帰ることは、音質を変化させることに相当している。

6. 課題

- $n=-2, 0, 2$ の時の波のグラフを印刷して提出する。
- 縦軸、横軸のラベルもつけて、グラフとしての体裁を整えること。
- この4回分の感想もつけてくれると今後の参考になります(当然、感想は採点対象にはしません)。
- 6/22(金)までに、6階 624号室(長島居室)に提出してください(ドアの前に封筒をはっておきますので、その中に入れてください)。