

2012年度講義ノート

天文学

はじめに

この講義の目的：

天文現象を理解するための基礎を学ぶ

天文学=総合科学。あらゆる分野の知見を総動員し、宇宙を理解する。
現象を覚えるのではなく、本質を理解すること

受講に当たって

- 数式が随所に出てきます。難しいものではありません。考えれば、必ず理解できます。重要なのは、考えること、です。考えたつもりになること、ではありません。理解できないならば、それは、まだ「考えた」段階まで達してはいないのだと思ってください。
- 数学は自然界の言語です。外国語を習得すればその国についての理解が格段に深まります。ちょっとした挨拶だけでも、まったく言葉を知らないのとは雲泥の差です。自然も同様です。ちょっとした数学を使うだけで、自然に対する理解が一気に深まります。
- 多様な自然の性質を一つ一つ暗記するのは不可能ですし、また新しい現象に出会った場合に対処のしようがありません。現象の背後にある本質はなにか、ということを常に意識してください。

教科書

随時以下の教科書を参照しながら勉強してください。問題は解くことが望ましい。

『宇宙の科学 - 天文学入門』(Bryan Milner・著、坪田幸政・訳、丸善)

目次

第1章	近代天文学の成立	7
第2章	Keplerの法則	9
2.1	数学的準備	9
2.2	ニュートンの法則	12
2.3	Keplerの法則	12
第3章	太陽系の姿	17
3.1	惑星(planets)	17
3.2	準惑星(dwarf planets)	19
3.3	太陽系小天体(Small Solar System Bodies; SSSB)	20
3.4	準惑星・SSSBについて	20
第4章	太陽系の形成	21
4.1	概略	21
4.2	星間雲の収縮と重力不安定	21
4.3	原始惑星系円盤	26
4.4	ダストから微惑星へ	27
4.5	惑星の大気	30
4.6	円盤ガスの消失	30
4.7	まとめ	30
第5章	太陽系外惑星	33
5.1	概要	33
5.2	主な発見方法	33
5.2.1	ドップラーシフト法	33
5.2.2	トランジット法	34
5.2.3	その他	34

第 6 章	天体の光度と等級	35
6.1	光度 (luminosity)	35
6.2	等級 (magnitude)	35
第 7 章	距離の測定 (I)	37
7.1	ステップ 1: レーダー測距	37
7.2	ステップ 2: 年周視差法	37
7.3	ステップ 3: 標準光源法	38
第 8 章	HR 図と星の進化	39
8.1	恒星の表面温度	39
8.2	黒体輻射	39
8.3	星の色	41
8.4	星の大きさ	42
8.5	HR 図	43
8.6	星のスペクトル型	44
第 9 章	星の進化	45
9.1	重力エネルギーの解放	46
9.2	核エネルギー	47
9.3	星の進化段階	50
第 10 章	銀河系と銀河	51
10.1	銀河 (galaxies)	51
10.2	銀河系 (The Galaxy)	51
10.3	ディスクの回転曲線	52
第 11 章	宇宙論	55
11.1	オルバースのパラドックス	55
11.2	膨張宇宙	55
11.3	ニュートン力学モデル	59
第 12 章	初期宇宙史	61
12.1	宇宙の誕生	61
12.2	自然界における 4 つの力	62
12.3	ビッグバン元素合成	64
12.4	宇宙マイクロ波背景輻射	64

第1章 近代天文学の成立

別紙プリント参照のこと。

おさえておくべき点：

1. 古代の人々も、当時の観察をもとに、合理的な世界観を構築していった。無論、それは現代から見れば非科学的ではあるが、だからと言って当時の人々を非合理の一言で片付けられるものではない。
⇒ つまり、現代の人々も、教育がなければ「合理的に」天動説を信じるようになる。
2. 対立する世界観も、合理性に基づき相互批判が行われていた（ 渾天説と蓋天説）
3. 合理的観測により、近代天文学成立のはるか以前に地動説に辿りついた人もいた。

第2章 Keplerの法則

2.1 数学的準備

- 微分とは何か
- 微分の意味

(例)

1. $f(x) = C$ (定数)

→ $f'(x) = 0$, 接線の傾きはゼロ

2. $f(x) = ax$

→ $f'(x) = a$

3. $f(x) = ax^2$

→ $f'(x) = 2ax$

(\because) $f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^2 = a(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)$
 $\simeq ax^2 + 2ax\Delta x = f(x) + 2ax\Delta x \Rightarrow f'(x) = 2ax$

4. $f(x) = ax^n$

→ $f'(x) = nax^{n-1}$

5. $f(x) = e^x$

→ $f'(x) = e^x$

$f(x) = e^{ax} \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}e^{ax} = a\frac{d}{d(ax)}e^{ax}, y = ax$ とおくと、
 $= a\frac{d}{dy}e^y = ae^y = ae^{ax}$

6. $f(x) = \ln x$

→ $f'(x) = 1/x$

$\ln x \equiv \log_e x$: 自然対数

$\log x \equiv \log_{10} x$: 常用対数

・位置ベクトルとベクトルの微分

位置ベクトル： \boldsymbol{x} や \boldsymbol{r} など で表す。次元 [L]。 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ (3次元の場合)

速度 (velocity): $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{x}}$

$$\odot v \simeq \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{移動距離}}{\text{かかった時間}} \rightarrow \text{次元 [L/T]}$$

加速度 (acceleration): $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{v}}$

$$\odot a \simeq \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{速度変化}}{\text{かかった時間}}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \right) = \frac{d^2 \boldsymbol{x}}{dt^2} \simeq \frac{\Delta x}{(\Delta t)^2} \rightarrow \text{次元 [L/T}^2\text{]}$$

・座標系

• デカルト (直交座標)

$$\boldsymbol{x} = (x, y), (x, y, z)$$

• (平面) 極座標

$$\boldsymbol{x} = (r, \theta) = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

• 円筒座標

$$\boldsymbol{x} = (r, \theta, z)$$

• 極座標

$$\boldsymbol{x} = (r, \theta, \phi)$$

$$(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

・運動方程式

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \quad (\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力})$$

質量 m の物体に力 \boldsymbol{F} が加わると、物体は加速度 \boldsymbol{a} で運動する

デカルト座標：

$$\begin{cases} ma_x = F_x \\ ma_y = F_y \end{cases}$$

極座標：

$$\boldsymbol{r} = r e^{i\theta} \quad \text{とおく} \quad (x \text{ 方向 : 実数、} y \text{ 方向 : 虚数})$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r} e^{i\theta} + r \frac{d}{dt} e^{i\theta} = \dot{r} e^{i\theta} + i r \dot{\theta} e^{i\theta}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}e^{i\theta} + i\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} + i\dot{r}\ddot{\theta}e^{i\theta} + i\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} - r\dot{\theta}^2e^{i\theta} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{i\theta} + i(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{i\theta}$$

ここで、

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

に注意すると、

$$i\hat{\mathbf{r}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$$

つまり、 $\pi/2(=90^\circ)$ ずれた方向 (垂直)。

結局、

$$\text{動径方向の加速度: } a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\text{角度方向の加速度: } a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

従って、運動方程式は、

$$\begin{cases} ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$$

となる。

・万有引力の場合

互いを結ぶ線分の方向にのみ力が働く $\rightarrow F_\theta = 0$

$$\odot m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{a^2}$$

問. r, θ はどこからはかった値?

いま、 $M \gg m$ とすると、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2}$$

とおいてよい ($a \simeq r$)。これを、

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + mr\dot{\theta}^2$$

と変形する。半径 (r) 一定の運動の場合は $\ddot{r} = 0$ であるので、

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{GMm}{r^2}, \text{ すなわち } \boxed{\text{遠心力=万有引力}}$$

となる。なお、しばしば $\omega = \dot{\theta}$ と書く。

2.2 ニュートンの法則

・運動法則

1. 慣性の法則

物体は、外から力が加わらない限り、静止または等速直線運動を続ける

2. 運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$

$\mathbf{F} = 0 \rightarrow \mathbf{a} = 0 \rightarrow$ 速度はゼロ又は一定 (1. と整合)

3. 作用-反作用の法則

・万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

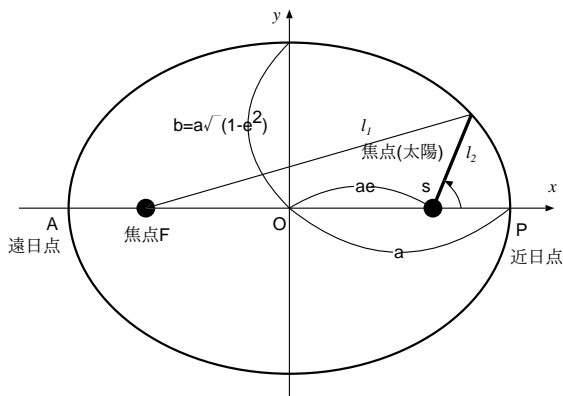
惑星の運動を説明するためには、この形が必要だった (\rightarrow Keplerの法則)。

2.3 Keplerの法則

1. 惑星の軌道は太陽と一つの焦点とする楕円である

背景:

- (a) 天動説から地動説へ コペルニクスの転回
- (b) しかし、円軌道を仮定すると、火星の運動を説明できなかった
- (c) 「完全」である「円」を破棄し、楕円とした



F : 焦点

a : 長半径

b : 短半径

$e \equiv \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$: 離心率

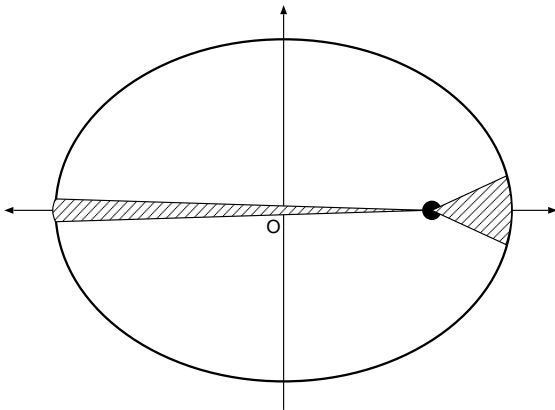
楕円の中心から焦点までの長さ: ae

楕円の方程式: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

円の場合、 $a = b = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

2. 面積速度一定の法則

観測データを解析した結果、「太陽と惑星を結ぶ線分が一定時間に掃く面積は一定である」という結論を得た



物理的には、角運動量保存則に対応。

- エネルギー保存則
- 運動量保存則

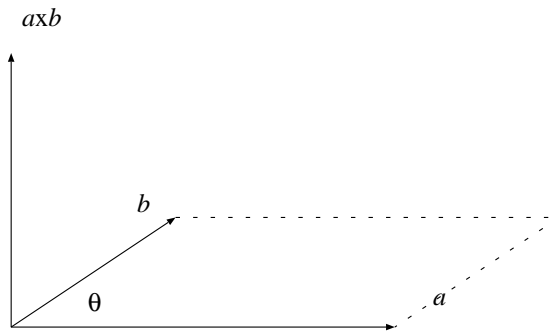
運動エネルギー $T = \frac{1}{2}mv^2$

運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

角運動量 $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$

\times : 外積 \leftrightarrow 内積 (\cdot)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y = ab \cos \theta$$



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z} = ab \sin \theta \hat{z}$$

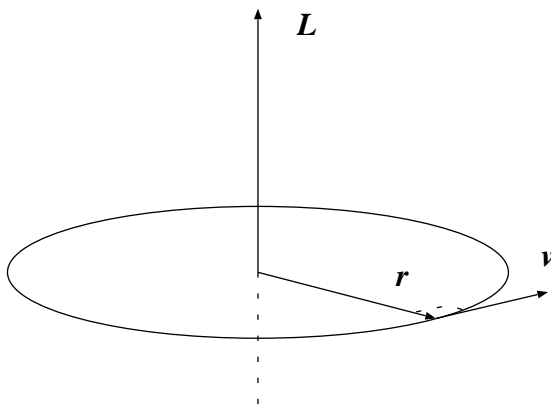
(\mathbf{a}, \mathbf{b} が xy 平面内の場合)

$\Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ なら、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + m \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{v} \times \mathbf{v} + m \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\because \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0)$$

いま、 $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$ なので ($\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$)、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{const.} \quad (\text{角運動量保存})$$

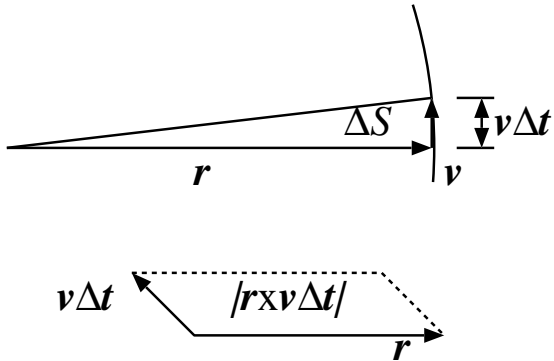


ここで面積速度は $\frac{dS}{dt}$ である。すると、

$$\Delta S \simeq \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} \Delta t|$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} \simeq \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2} |\mathbf{L}| = \text{const.}$$

$$\odot \frac{dS}{dt} = \text{const.}, \text{つまり、面積速度一定//}$$



3. 軌道長半径の3乗が公転周期の2乗に比例 (調和の法則)... $a^3 \propto T^2$

簡単のため、円軌道を仮定する

力のつりあい (万有引力=遠心力) より、

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = mr\dot{\theta}^2 = mr\omega^2, \quad v = r\omega$$

あるいは、運動方程式 (ただし $\ddot{r} = 0$) より、

$$m(-r\omega^2) = -\frac{mv^2}{r} = -\frac{GMm}{r^2}$$

これより、

$$rv^2 = GM.$$

いま、周期 T は、

$$T = \frac{2\pi r}{v} \left(= \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

であるから、

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

これらより、

$$rv^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = GM$$

$$\Rightarrow r^3 \propto T^2.$$

いま、地球は1年で1周し、軌道半径は1AUなので、

$$\left(\frac{r}{\text{AU}}\right)^3 = \left(\frac{T}{\text{yr}}\right)^2$$

と書ける。

宿題1

問1 $G = 6.7 \times 10^{-11} [\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]$, $M = 2 \times 10^{30} [\text{kg}]$, $1[\text{AU}] = 1.5 \times 10^{11} [\text{m}]$, $1[\text{yr}] = 3.15 \times 10^7 [\text{s}]$ として、上の式がほぼ成り立つことを確かめよ。

問2 記憶している量を使って、月の運動から地球の質量を求めよ。また、理科年表記載の地球の質量と比較し、どれくらいの誤差で求めたか調べよ。

なお、運動方程式

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}$$

より、

$$m \frac{r}{T^2} \sim \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{r^3}{T^2} \sim GM$$

$$\Rightarrow r^3 \propto T^2$$

と理解することができる。

第3章 太陽系の姿

太陽系の構成要素

- 太陽 (恒星) 次回
- 惑星 (8 個; 水金地火木土天海)
- 準惑星 (dwarf planets; 冥王星等)
- 太陽系小天体 (small solar system bodies; SSSB)
 - 小惑星、彗星、塵、プラズマ (電離ガス)、その他
- 衛星 (太陽以外の天体を回る太陽系内天体)

3.1 惑星 (planets)

- 惑星の定義 (IAU)
 - 太陽の周りを回り、
 - 重力平衡形状を持ち、
 - 周囲から衛星以外の他天体を排除

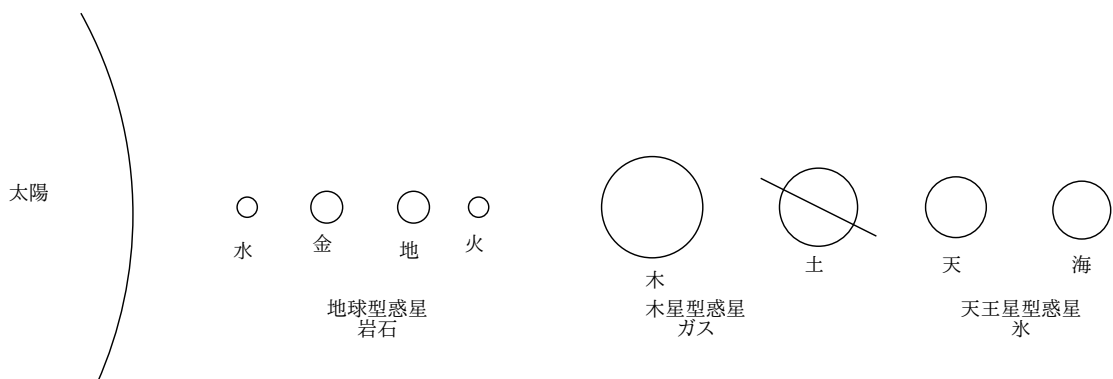
している天体

- 分類
 - 地球型惑星 (rocky planets)
サイズ小、高密度 ($3 - 5[\text{g/cm}^3]$)
 - 木星型惑星 (gas giants)
サイズ大、H, He 主成分の厚い大気
 - 天王星型惑星 (ice giants)
サイズ中、氷が主成分

表 2-3 太陽系天体の諸量.

(1)	(2)質量 (地球=1)	(3)赤道半径 (1000 km)	(4)密度 (g/cc)	(5)軌道長半径 (天文単位)	(6)離心率	(7)軌道 傾斜角(°)	(8)軌道周期 (太陽年)
太陽	3.33×10^5	696	1.41	—	—	—	
水星	0.055	2.44	5.43	0.387	0.205	7	0.241
金星	0.815	6.05	5.24	0.723	0.007	3.4	0.615
地球	1.000	6.38	5.52	1.000	0.017	—	1.000
火星	0.107	3.40	3.93	1.524	0.093	1.85	1.881
木星	318	71.5	1.33	5.203	0.048	1.30	11.86
土星	95.2	60.3	0.69	9.55	0.055	2.49	29.46
天王星	14.5	25.6	1.27	19.2	0.046	0.77	84.02
海王星	17.2	24.8	1.64	30.1	0.009	1.77	164.8
冥王星	0.0022	1.14	2.13	39.5	0.249	17.1	247.8
月	0.0123	1.74	3.34				

図 3.1: 『宇宙科学入門』尾崎洋二



● 惑星の軌道

- 太陽-地球間の平均距離

$$1[\text{AU}] = 1[\text{天文単位}] = 1.496 \times 10^{11}[\text{m}] = 1 \text{ 億 } 5 \text{ 千万 } [\text{km}]$$

- チチウス-ボーデの法則

平均距離 (あるいは長半径) a

$$a \simeq 0.4 + 0.3 \times 2^n$$

で良く近似できる

なお現在では、単なる経験式 (偶然) であり、物理的意味はないと考えられている。ただし、惑星形成が、ベキ関数的に実現したことを示唆

– 軌道傾斜角

0に近い ほぼ同一平面内(黄道面)

太陽系形成の重要な手がかり

– 惑星の運動

質量 $M_{\odot} = 3.33 \times 10^5 M_E$

$M_J = 318 M_E$ 質量の大半を太陽が占める

角運動量

太陽 (太陽半径に全質量があるとした場合の自転角運動量)

$$\begin{aligned} L_{\odot} &\lesssim M_{\odot} R_{\odot} V_{\odot} \simeq M_{\odot} R_{\odot}^2 \omega_{\odot} \\ &\simeq 3 \times 10^5 M_E (7 \times 10^5 [\text{km}])^2 \frac{2\pi}{27/365 [\text{yr}]} \simeq 1.2 \times 10^{19} M_E [\text{km}^2/\text{yr}] \end{aligned}$$

木星

$$\begin{aligned} L_J &\simeq M_J a_J V_J \simeq M_J a_J^2 \omega_J \\ &\simeq 300 M_E \left(5 [\text{AU}] \frac{1.5 \times 10^8 [\text{km}]}{1 [\text{AU}]} \right)^2 \frac{2\pi}{10 [\text{yr}]} \simeq 1.1 \times 10^{20} M_E [\text{km}^2/\text{yr}] \end{aligned}$$

惑星が圧倒的 (太陽の占める角運動量は約 1%のみ)

また、全惑星が同じ向きに公転

太陽系形成の重要な手がかり

3.2 準惑星 (dwarf planets)

定義

- 太陽の周りを回り、
- 重力平衡形状を持ち、
- 他の天体を排除しておらず、
- 衛星ではない

現在のところ、冥王星、セレス(ケレス)、エリス、マケマケ、ハウメアの5つ(セレス以外は「冥王星型天体」に分類)

今後増えると予想される

3.3 太陽系小天体 (Small Solar System Bodies; SSSB)

太陽の周りを回る、惑星・準惑星・衛星以外の天体

3.4 準惑星・SSSBについて

バラエティに富んでいる

主な種類

- メインベルト...火星と木星の間。小惑星帯。
- 冥王星型天体...海王星以遠天体 (TNO)、エッジワース・カイパーベルト天体
- オールトの雲...彗星の「巣」(仮説)
- その他、様々な「族」

第4章 太陽系の形成

4.1 概略

太陽形成の「副産物」

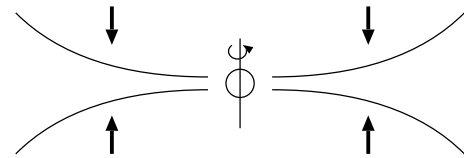
銀河系内の濃い雲 (ガス+ダスト)

自己重力による収縮

中心に太陽が形成

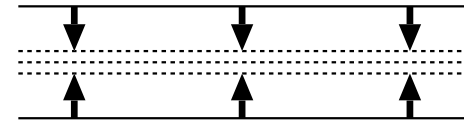
周囲に遠心力で支えられた円盤

原始太陽系円盤



ディスク内のダストが鉛直方向に沈殿

ダスト層の密度が十分高くなると、ダストの自己重力により分裂 微惑星 (~ 数 km)



微惑星同士の合体成長により大きくなる 地球型惑星

ある程度大きくなると、ガスも引きつけられる ガス惑星

なんらかのメカニズムでガス消失

京都モデル

4.2 星間雲の収縮と重力不安定

星間雲の構成：H ~ 75%, He ~ 23%, それ以外の元素 ~ 2%
(H, He, Li: ビッグバンで生成) (主に星で生成)

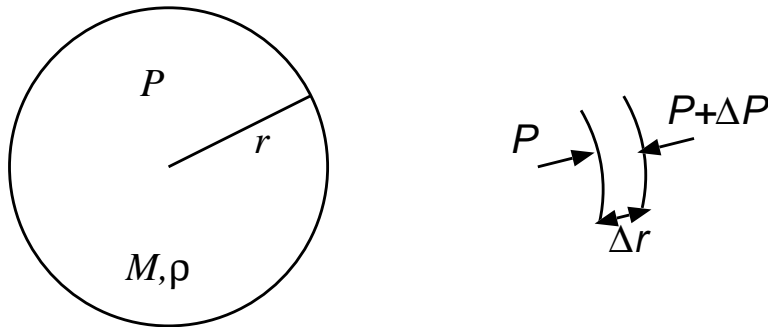
高密度領域

原子同士が衝突しやすい

分子(COなど)がしやすい 分子雲

分子雲内の密度の高いところ 分子雲コア...星の「種」

重力不安定...自己重力でガス雲は収縮できるか？



- 球殻の質量

$$\Delta M = 4\pi r^2 \rho \Delta r$$

- 球殻への重力

$$F_g = -G \frac{M_r}{r^2} \Delta M \quad M_r: \text{半径 } r \text{ より内側の質量}$$

$$= -\frac{GM_r}{r^2} 4\pi r^2 \rho \Delta r$$

- 圧力勾配による力

$$F_{pg} = 4\pi r^2 P - 4\pi r^2 (P + \Delta P)$$

$$= -4\pi r^2 \Delta P \quad (\text{外側の圧力の方が低いので、} \Delta P < 0)$$

- 力のつりあいより、

$$F_g + F_{pg} = 0 \Rightarrow 4\pi r^2 \Delta P = -\frac{GM_r}{r^2} 4\pi r^2 \rho \Delta r$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho \quad \text{静水圧平衡}$$

簡単な評価

圧力勾配を $P \propto -r$ と簡単に近似する

$$\frac{dP}{dr} \simeq -\frac{P}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{R} \simeq \frac{GM\rho}{R^2} \simeq GR\rho^2$$

ここで音速 $c_s^2 \equiv \frac{dP}{d\rho} \simeq \frac{P}{\rho} \propto T$ ($\because P \propto \rho T$)

$$\rightarrow P \simeq c_s^2 \rho \simeq GR^2 \rho^2$$

$$\rightarrow R^2 \simeq \frac{c_s^2}{G\rho}, \Rightarrow R \simeq \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}}$$

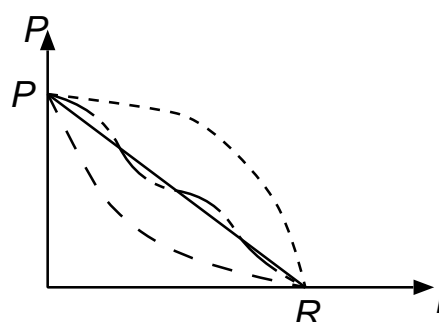


図 4.1: 実線で近似する

臨界長 (Jeans 長) λ_J

$$\lambda_J \equiv \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}}$$

臨界質量 (Jeans 質量) M_J

$$M_J \simeq \lambda_J^3 \rho = \frac{c_s^3}{G^{3/2} \rho^{1/2}}$$

λ_J より大きい雲/ M_J より大質量の雲は、自己重力で「崩壊」(収縮) する。

収縮する時間スケール (free-fall time)

$$t_{ff} \simeq \frac{\lambda_J}{c_s} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (\lambda > \lambda_J, M > M_J)$$

$\lambda < \lambda_J, M < M_J$ の場合、圧力が下がらないと収縮しない
内部エネルギーを抜く (冷却)

典型的なスケール

$$\lambda_J = 4.3 \times 10^4 \left(\frac{T}{10\text{K}} \right)^{1/2} \left(\frac{n}{10^4 \text{cm}^{-3}} \right)^{-1/2} [\text{AU}]$$

$$M_J = 5.4 \times \left(\frac{T}{10\text{K}} \right)^{3/2} \left(\frac{n}{10^4 \text{cm}^{-3}} \right)^{-1/2} M_\odot$$

$$t_{ff} = 1.1 \times 10^6 \left(\frac{n}{10^4 \text{cm}^{-3}} \right)^{-1/2} [\text{yr}]$$

100 万年程度で崩壊する。

収縮をはじめるとどうなるか? 熱力学

熱力学第一法則 (エネルギー保存則)

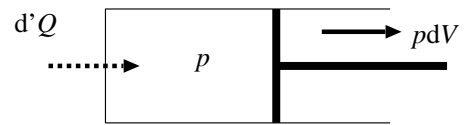
$$d'Q = dE + pdV$$

熱・仕事 エネルギー (同じ次元)

$d'Q$ 注入されたエネルギー (熱量)

dE 内部エネルギー

pdV 仕事



$$d'Q = TdS \quad S: \text{エントロピー}$$

- 体積一定のとき ($dV = 0$)

$$d'Q = dE \equiv nC_V dT$$

n : モル数

C_V : 定積比熱。1mol 当たり、1K 上昇させるのに必要な熱量
注入した熱が、すべて温度上昇に使われる

- 圧力一定のとき ($dp = 0$)

$$d'Q = dE + pdV \equiv nC_p dT$$

C_p : 定圧比熱。 pdV の仕事の分だけ余計に熱が必要。
ここで $dE = nC_V dT$ より、

$$nC_p dT = dE + pdV$$

$$= nC_V dT + pdV$$

状態方程式 $pV = nRT$ より (R は気体定数)、

$$= nC_V dT + d(pV) - Vdp$$

$$= nC_V dT + d(nRT) \quad (\odot dp = 0)$$

$$= n(C_V + R)dT$$

$$\odot C_p = C_V + R$$

- 断熱のとき ($d'Q = 0$)

$$dE + pdV = 0$$

$$\rightarrow nC_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$$

$$\rightarrow C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0$$

$$\rightarrow C_V \frac{dT}{T} + (C_p - C_V) \frac{dV}{V} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0, \quad \gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} : \text{比熱比}$$

積分すると、

$$\rightarrow \ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const.} \quad y = \ln x, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \rightarrow dy = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \ln TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

$$\rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

$pV \propto T$ より、

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

宿題 2

断熱変化の式 $pV^\gamma = \text{const.}$ の導出を、レポート用紙 1 枚程度にまとめよ。

ここで、 F_g と F_{pg} の比を考える。

$$\frac{F_g}{F_{pg}} \begin{cases} > 1 & \dots \text{収縮} \\ = 1 & \dots \text{つりあい} \\ < 1 & \dots \text{膨張} \end{cases}$$

$$\frac{F_g}{F_{pg}} \simeq \frac{GR\rho^2}{P/R} \simeq \frac{GR^2\rho^2}{P}$$

$$\propto \frac{V^{2/3}V^{-2}}{P} \propto \frac{V^{-4/3}}{P} \quad \rho \propto \frac{1}{V} \propto \frac{1}{R^3}, R \propto V^{1/3}$$

$$\propto V^{\gamma-4/3}$$

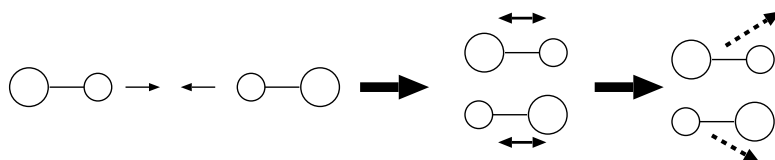
$\gamma > \frac{4}{3}$ のとき、 V で $\frac{F_g}{F_{pg}}$ \odot 収縮しない

$\gamma < \frac{4}{3}$ のとき、 V で $\frac{F_g}{F_{pg}}$ \odot 収縮する

単原子分子気体... $C_V = \frac{3}{2}R, C_p = \frac{5}{2}R \quad \gamma = \frac{5}{3} > \frac{4}{3}$

二原子分子気体... $C_V = \frac{5}{2}R, C_p = \frac{7}{2}R \quad \gamma = \frac{7}{5} > \frac{4}{3}$

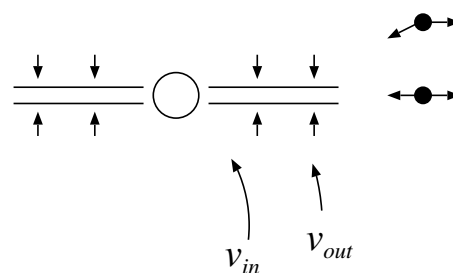
\odot 断熱収縮の場合、どこかで圧力が強くなり、収縮が止まる。実際の宇宙では、C, O, 分子などが効率良くエネルギーを放出する (冷却)



ほぼ等温で収縮、 $pV \propto T = \text{const.} \Rightarrow \gamma \simeq 1 < \frac{4}{3}$ 、収縮できる星が作られる

4.3 原始惑星系円盤

ガス雲の収縮 角運動量保存により、回転速度円盤ができる
粘性等により、角運動量が外に輸送される
原始惑星系円盤へ



個体成分の量

Hayashi (1982): 現存する惑星の分布から、最小限の個体成分の分布を求めた (minimal model)

図 4.2: $v_{in} > v_{out}$ 内側の粒子は外側の粒子に運動量を与える 内側の粒子はさらに内側へ

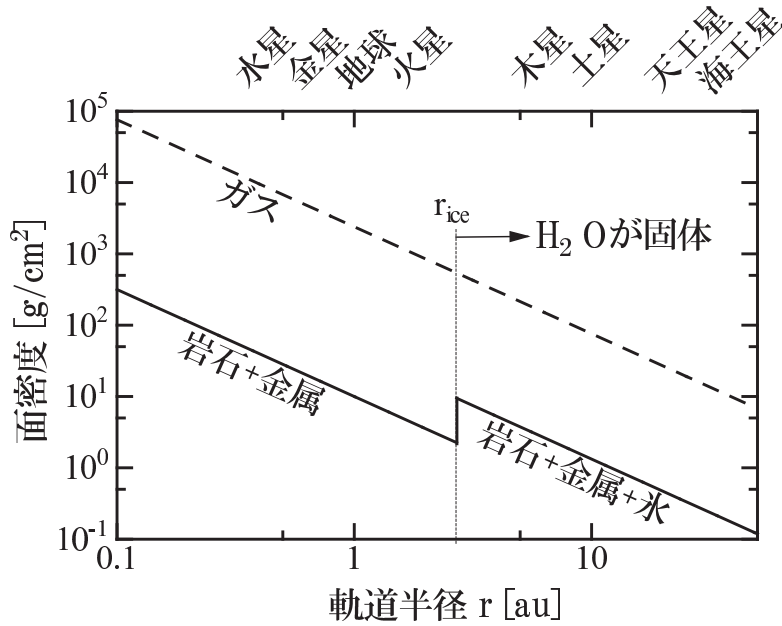
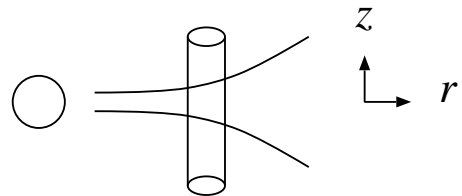


図 4.3: 木星型惑星のほうが、固体の材料物質が多い

図 4.4: 『一億個の地球』井田茂・小久保英一郎 (岩波科学ライブラリー 71)

面密度 $\sigma(r)$

密度 $\rho(r, z), \sigma(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r, z) dz$



4.4 ダストから微惑星へ

・ダストの合体成長

最初、ダストは $1\mu\text{m}$ 以下の微小なもの。

ランダムに合体を繰り返し、次第に大きくなる。ダストが質量密度 ρ あるところに、断面積 σ の別のダストが相対速度 v でやってくると、時間 Δt の間にこのダストが掃く体積は $V = \sigma v \Delta t$ 。その中 (体積 V) にあるダストの質量は ρV 。このうち、ぶつかってくっつく割合 (確率) を S とすると、 Δt の間に、このダストが得る

図 4.5: 『一億個の地球』井田茂・小久保英一郎 (岩波科学ライブラリー 71)

図 4.6: 『惑星の科学』清水幹夫・編

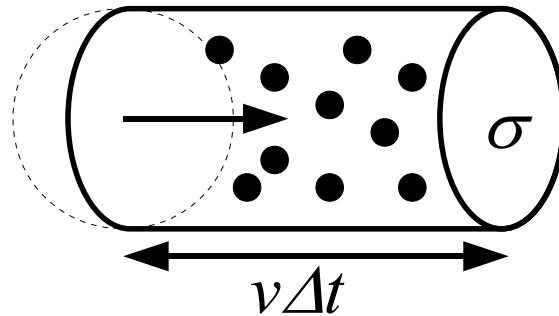


図 4.7: σ :ダストの断面積、 v :ダストの速度

質量 (質量の増分) Δm は、

$$\Delta m \simeq S\rho V = S\rho\sigma v\Delta t, \quad (4.1)$$

これより

$$\frac{dm}{dt} \simeq S\rho\sigma v. \quad (4.2)$$

ダストが小さいときは、その半径 D に対して、幾何学的断面積、 πD^2 が σ になる。もっと成長して「微惑星」になると、重力で集まってくる効果も考慮する必要がある (後述)。

ダストがメートルサイズにまで成長すると、ガスとの相互作用 (粘性) により、数百年で太陽まで落ちてしまう (「危険領域」)。どのように回避するか？

ダストの沈殿がすすむと、ダスト層が自身で重力不安定になる (Jeans 不安定と本質的には同じであるが、Kepler 回転している効果を考慮する必要がある)。

ディスクの分裂 「微惑星」の誕生 (~km) 自己重力天体 原始惑星

つまり、重力不安定で、ミクロンサイズからキロメートルサイズまで一気に成長することにより、メートルサイズでいる時間を短縮し、太陽まで落ちずにすむ。

・微惑星の暴走成長

衝突断面積に重力の効果を考える。質量 m 、半径 D の微惑星が近付くと、相対速度 v で動く他のダストは重力により引きつけられ、この微惑星の幾何断面積 πD^2 よりも広い範囲のダストを食べることができる。この、実効的な断面積を σ とする。

重力が強いほど σ は大きくなるので、質量の大きい微惑星は、他の微惑星よりも大量のダストを食べ、この微惑星だけが急激に太っていく。これを「暴走成長 (runaway growth)」と呼ぶ。

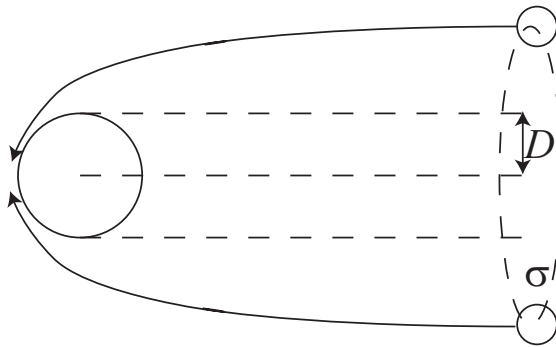


図 4.8: σ :ダストの断面積、 D :ダストの半径

この重力の効果(「重力フォーカシング」)を考慮した断面積を求めてみよう。

微惑星から無限遠にあるダストの初速度を v_0 、インパクトパラメータ(初速度のままダストが進んだ場合の直線と、微惑星の中心との距離)を b 、微惑星に衝突する直前の速度を v_m 、ダストの質量を m 、微惑星の質量と半径を M, D としよう。すると、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 - \frac{GMm}{D} \quad (4.3)$$

⊙初期には距離 ∞ として良いので、位置エネルギーはゼロ。

⊙ダスト m の半径は微惑星に比べ十分小さい

また角運動量保存則より、

$$bv_0 = Dv_m \quad (4.4)$$

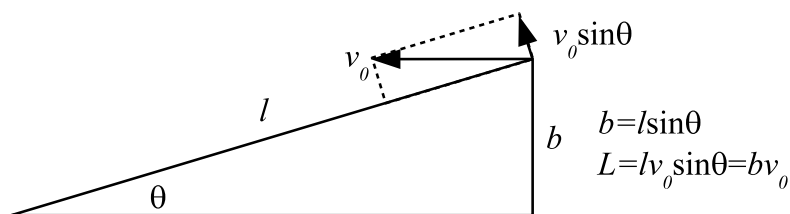


図 4.9: v_0 : ダストの相対初速度、 b : インパクトパラメータ、 L : 角運動量

これらの式より、

$$\begin{aligned} v_0^2 &= v_m^2 - \frac{2GM}{D} \\ &= \left(\frac{b}{D}\right)^2 v_0^2 - \frac{2GM}{D} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b^2 &= D^2 + \frac{2GMD}{v_0^2} \\ &= D^2 \left(1 + \frac{2GM}{Dv_0^2} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \sigma = \pi b^2 = \sigma_g \left(1 + \frac{2GM}{Dv_0^2} \right) \quad (4.7)$$

ここで

$$\sigma_g \equiv \pi D^2 (\text{幾何断面積}) \quad (4.8)$$

微惑星は固体であり、ほぼ $M \propto D^3$ と考えられるので、質量が大きいほど散乱断面積 σ が大きくなることがわかった。

4.5 惑星の大気

表面での重力エネルギーが、熱エネルギーを越えると、大気をまとえることができる。

$$\frac{GM}{D} > \frac{3}{2} c_s^2 \quad (4.9)$$

ガスの温度が 300[K] 程度... $m > 6 \times 10^{25}[g]$ ~ 月の質量

固体成分の質量が $\sim 10m_E$ (m_E :地球質量) を越すと、いくらでもガスを集められる 木星型惑星

4.6 円盤ガスの消失

まだよくわかっていない。考えられるメカニズムは、

- 誕生間もない中心星 (T Tauri 型星) による活発な活動性 (紫外線や星風)
- 流体力学的不安定性によりガスが中心星へ落下
- 巨大惑星の誕生にともなう重力的効果によるガスの中心星への落下

など。

4.7 まとめ

木星型惑星のほうが、固体の材料物質が多い

微惑星同士の衝突が頻繁に起き、急速に原始惑星が成長する

このとき、微惑星同士は同じように成長するのではなく、最も大きいものが暴走的に成長する（「暴走成長 (runaway growth)」） 図 4.5

木星側惑星はすばやく成長し、重力が強くなり、周囲のガスを引きつけ、厚い大気を形成する

地球型惑星は材料物質が少ないため大きくなれず、ガスを引きつけられない

天王星型惑星は公転が遅く衝突頻度が低いため、成長が遅く、あまりガスを引きつけられない(その前にガスが消失してしまった)

惑星形成のムービー

国立天文台 4次元デジタル宇宙プロジェクト

<http://4d2u.nao.ac.jp/>

第5章 太陽系外惑星

5.1 概要

太陽以外の恒星の周りを回る惑星のこと。

1995年、Michel Mayor と Didier Queloz により最初に発見された。

ペガサス座 51 番星、
 $a = 0.05\text{AU}$, $M \sim M_J$

2011年10月11日現在、692個の系外惑星が発見されている。

大多数は中心星に極めて近く ($a \ll 1\text{AU}$)、木星型 hot Jupiter

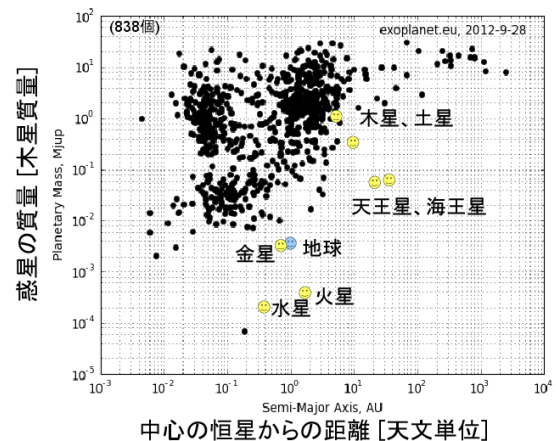
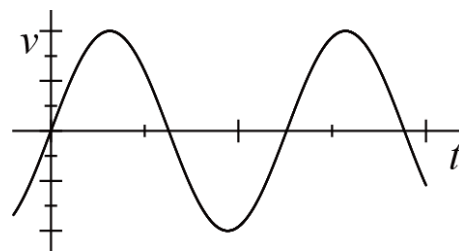


図 5.1: <http://exoplanet.eu/>より作成

5.2 主な発見方法

5.2.1 ドップラーシフト法

- ・惑星は、中心星と惑星の「重心」のまわりを回っている
- ・中心星も「重心」のまわりを回っている
中心星の中心から少しずれている
- ・中心星の「公転」を調べれば、惑星の情報が得られる
- ・ドップラー効果を使って中心星の運動を観測する



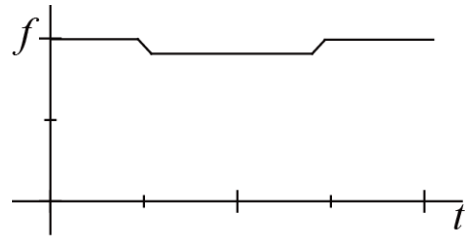
なるべく軌道面に近い角度から観測しないと、正確に速度を見積るのが難しい

5.2.2 トランジット法

惑星が中心星の手前を横切る際、中心星がわずかに暗くなるのを検出する「食」

軌道面内(真横)から観測しないとわからない

トランジット法とドップラーシフト法を組み合わせると、惑星の質量などが詳細に定まる



5.2.3 その他

重力レンズを使う方法などがある。

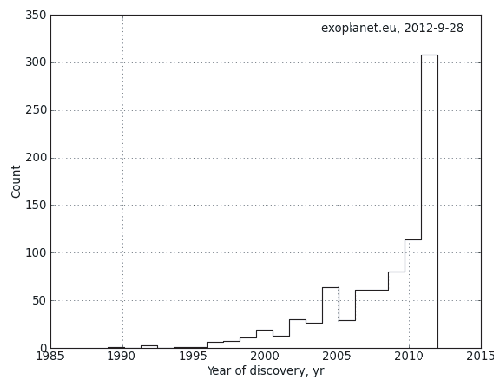


図 5.2: 系外惑星の年ごとの発見数。 <http://exoplanet.eu/> より作成

第6章 天体の光度と等級

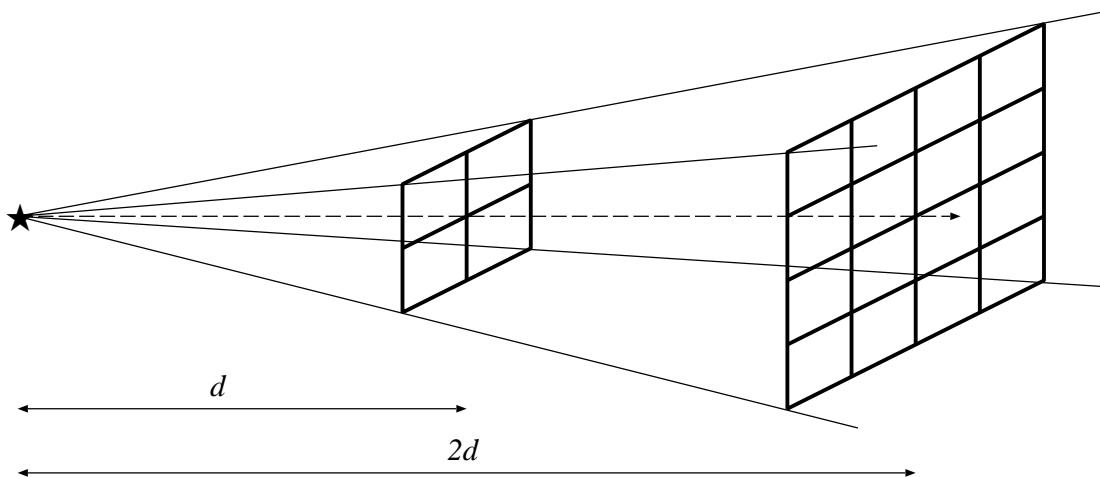
6.1 光度 (luminosity)

単位時間に放出されるエネルギー、 L 。

単位：[J/s]=[W], [erg/s].

同じ光度の星でも、近いと明るく、遠いと暗く見える。

見かけの明るさ 単位面積、単位時間あたりに目に入る光の量



面積： $A \propto d^2$

単位面積当たりの光の流れ (エネルギーフラックス、[W/m²])： $F \propto \frac{1}{d^2}$ 目に入る光の量

(星から単位時間に放出されるエネルギー)=(半径 d の球の表面積) \times (単位面積、単位時間当たりのエネルギー)

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

6.2 等級 (magnitude)

$$m = -2.5 \log \frac{F}{F_0} + m_0 \text{ (ポグソンの式)}$$

F_0, m_0 : 基準となるフラックス、等級。通常は Vega を使う (0 等星)。
 m : 見かけの等級、実視等級。

明るい F m

1 等星の F は 6 等星の F の 100 倍 5 等上がると F は 100 倍 $1-6=-5$ 。
 $-2.5 \log(100/1) = -2.5 \log 10^2 = -5$

m, F : 我々からの距離により変動する
 星そのものを表す指標にはならない

絶対等級 M : 10pc 離れた点から見た等級

10pc でのエネルギーフラックスを F_{10} とすると、

$$\begin{aligned} m - M &= -2.5 \log \frac{F}{F_{10}} \\ &= -2.5 \log \left(\frac{L}{4\pi d^2} / \frac{L}{4\pi (10\text{pc})^2} \right) \\ &= -2.5 \log \left(\frac{1/d^2}{1/(10\text{pc})^2} \right) \\ &= 2.5 \log \left(\frac{d}{10\text{pc}} \right)^2 \\ &= 5 \log \frac{d}{10\text{pc}} \\ &= 5 \log \frac{d}{\text{pc}} - 5 \end{aligned}$$

$$M = m - 5 \log \frac{d}{10\text{pc}}$$

遠い d M 明るい

遠くなくても m で見えるということは、それだけ明るい(教科書図 2.3)

星について知るためには、距離を知ることが重要

第7章 距離の測定(I)

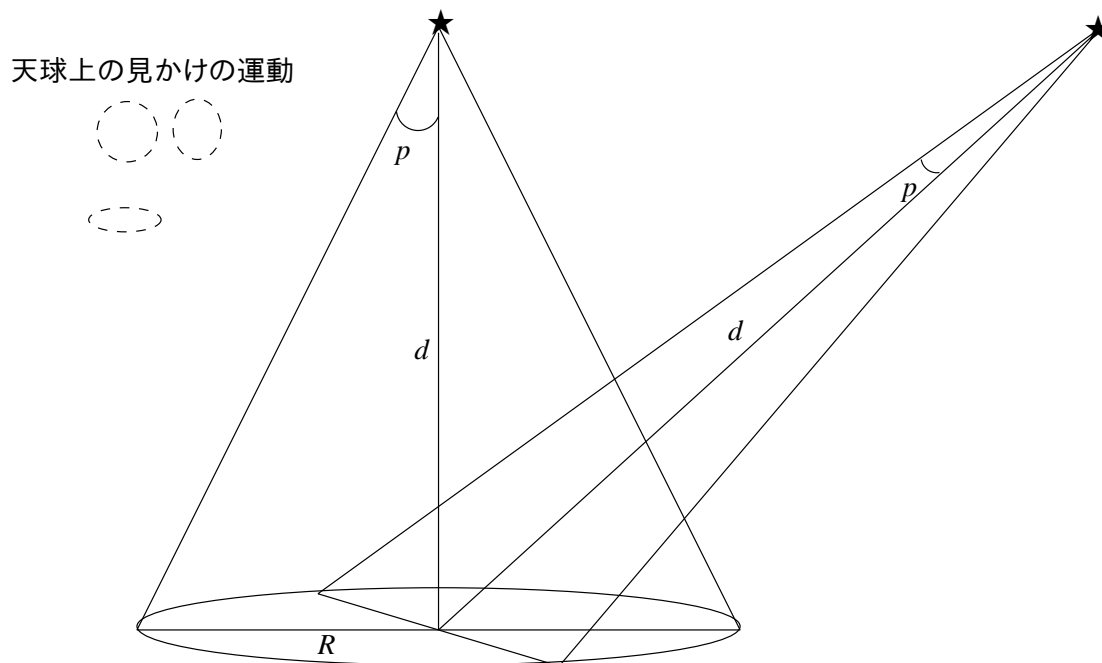
「そこ」まで行かずにしていかに距離を測定するか？

7.1 ステップ1：レーダー測距

電波を発射し、はね返ってきた電波を受信するまでの時間差から距離を求める。
水星、金星、火星や惑星探査機など(天文単位 m, km)。

7.2 ステップ2：年周視差法

三角測量。太陽-地球間の距離を基線とし、見込む角度を測り、距離を求める。



1年間、近傍の星を観測し続けると、天球上を運動するように見える

d : 太陽と恒星の間の距離

p : 年周視差 [rad]

R : 1[AU]

$$R = d \tan p$$

いま、 $p \ll 1$ なので Taylor 展開すると、 $\tan p \simeq p$ [rad]。

$$R = dp$$

$p = R/d \propto 1/d$ 遠い恒星ほど視差が小さい

$p = 1''$ (秒角) のときの d を、1[pc](パーセク、parsec) と定義する。

$$\left(\frac{p}{1''}\right) = \left(\frac{d}{\text{pc}}\right)^{-1}.$$

HIPPARCOS 衛星により、約 100pc 以内の 9 等より明るい星の距離が求められている。

他にも統計視差法、収束点法などいくつかある。

7.3 ステップ3：標準光源法

[教科書 p.18 参照のこと]

主に変光星 [特にセファイド (ケフェウス) 型] の周期 (P)-光度 (L) 関係を使う。

ある種の変光星... P と L に良い相関

$$M_V = -2.76(\log P - 1) - 4.218$$

1. 変光星の実視等級 m を観測
2. m の変動周期、 P を観測
3. $P - L$ 関係から、 L を計算
4. L から絶対等級 M に換算
5. $m - M$ からポグソンの式を使って距離を計算
 - 年周視差法により距離のわかっているセファイドが必要
 - 変光周期がわかればよいので、ずっと遠くまで距離を測定できる
ハッブル宇宙望遠鏡により、約 10Mpc 離れたおとめ座銀河団までの距離が求められた。

レーダー 年周視差 セファイド ... : 「距離はしご」

第8章 HR図と星の進化

8.1 恒星の表面温度

太陽	約 6000K	黄
ベテルギウス	低温	赤
シリウス	高温	白

(中心は原子核反応が起こるほど高温)

温度と色は対応している

星の光をプリズムや回折格子によって波長ごとに分解 虹
高温の星ほど短波長の電磁波が強い

8.2 黒体輻射

完全に「黒い」物体を考える

電磁波をすべて吸収する すべて放射できる

$$\left. \begin{array}{l} \text{電磁波の振動数 } \nu \\ \text{波長 } \lambda \\ \text{光速 } c \end{array} \right\} \lambda\nu = c \quad (\text{波の基本式})$$

温度 T の黒体の、

- 単位表面積当たり、
- 単位時間当たり、
- $\nu \sim \nu + d\nu$ の範囲の振動数の

電磁波のエネルギー放出量は、

$$B_\nu(T)d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu \quad (8.1)$$

k : ボルツマン定数

h : プランク定数

プランク分布。 量子力学成立のきっかけ。

- $h\nu \ll kT$ のとき (光子のエネルギー $h\nu$ が kT に比べて小さい)

$$B_\nu(T)d\nu \simeq \frac{2\pi\nu^2 kT}{c^2} d\nu \quad \text{レイリー・ジーンズの法則} \quad (8.2)$$

- $h\nu \gg kT$

$$B_\nu(T)d\nu \simeq \frac{2\pi h\nu^3}{c^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu \quad \text{ウィーンの法則} \quad (8.3)$$

全振動数について積分すると、

$$B = \int_0^\infty B_\nu(T)d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 \equiv \sigma T^4 \quad \text{シュテファン・ボルツマンの法則(8.4)}$$

σ : シュテファン・ボルツマン定数

輻射強度は温度の4乗に比例する
プランク分布を波長の関数に変換する。

$$B_\nu d\nu = \tilde{B}_\lambda d\lambda \quad (8.5)$$

$$\tilde{B}_\lambda d\lambda = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \quad (8.6)$$

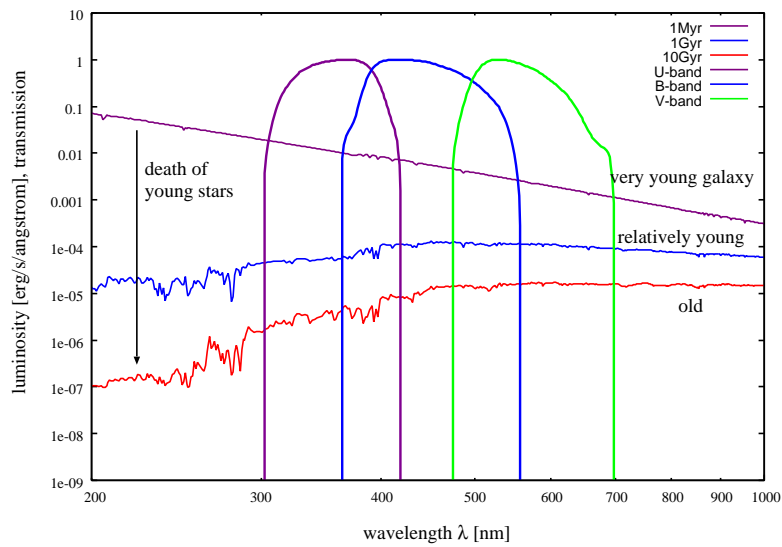
$$= \frac{2\pi h c^3}{c^2 \lambda^3} \frac{1}{\exp(hc/kT\lambda) - 1} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \quad (8.7)$$

$$= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/kT\lambda) - 1} d\lambda \quad (8.8)$$

この分布のピークは、 $(\frac{d\tilde{B}_\lambda}{d\lambda} = 0$ となる λ)

$$\frac{hc}{kT\lambda} \simeq 4.97 \quad (8.9)$$

$$\rightarrow \lambda T = 2.9 \times 10^{-3} [\text{K} \cdot \text{m}] = 2.9 \times 10^6 [\text{K} \cdot \text{nm}] \quad \text{ウィーンの変位則(8.10)}$$



- 太陽... $T \simeq 5800\text{K}$

$$\lambda = \frac{2.9 \times 10^{-3}}{5800} = 0.5[\mu\text{m}] = 500[\text{nm}] \quad (8.11)$$

宿題 3

1. 可視光線：400(青)-800(赤) [nm] に相当する温度範囲を求めよ。
2. 人体が放出する輻射の典型的な波長・振動数を求めよ。

8.3 星の色

・「色」を定量化する

カメラに特定の波長の光のみを通すフィルターをつけて撮影する

F_X : X-フィルターをつけて得たエネルギーフラックス

m_X : それに対応する等級

$$m_X = -2.5 \log \frac{F_X}{F_{X,0}} + m_{X,0}$$

なお、見かけの(実視)等級は、通常バンド名で書く ($U \equiv m_U, B \equiv m_B, \dots$)。

絶対等級は、大文字 M にバンド名 (M_U, M_B, \dots)。

・色：フラックスの比、あるいは等級の差

例：

$$B - V = -2.5 \log \frac{F_B}{F_{B,0}} + B_0 - \left(-2.5 \log \frac{F_V}{F_{V,0}} + V_0 \right) \quad (8.12)$$

$$= -2.5 \log \frac{F_B}{F_V} + 2.5 \log \frac{F_{B,0}}{F_{V,0}} + B_0 - V_0 \quad (8.13)$$

$$= -2.5 \log \frac{F_B}{F_V} + C \quad (8.14)$$

・温度と色

温度が高い 短波長の光が強い B 明、 V 暗 $B - V$ 小

$$B - V \simeq \frac{9000}{T} - 0.85$$

宿題4

色は距離に依らないことを示せ。

8.4 星の大きさ

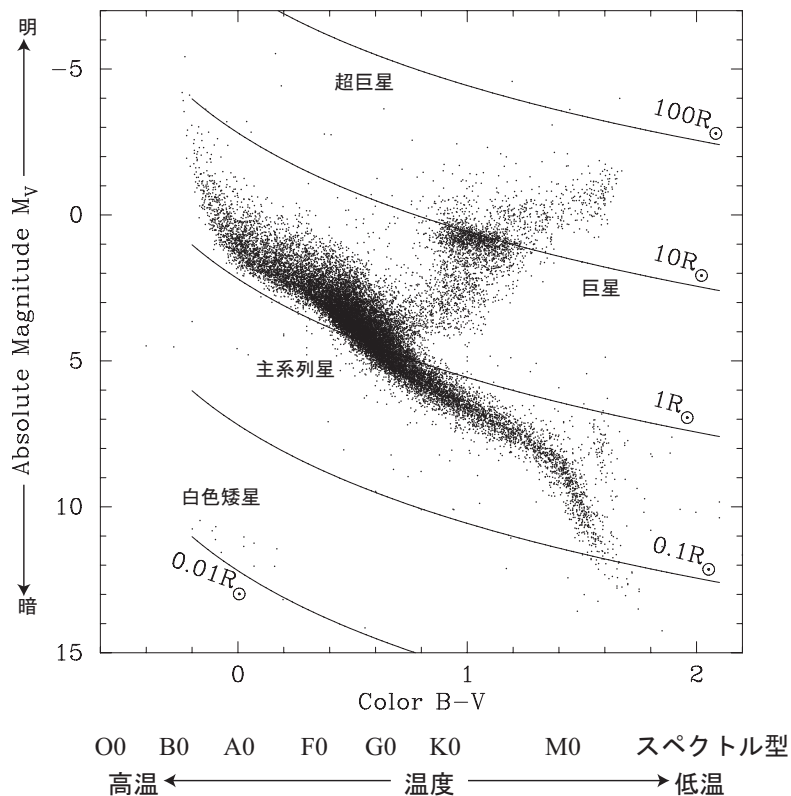
シュテファン・ボルツマンの法則 $B = \sigma T^4$ は、単位時間・単位面積あたりに放出されるエネルギー量であった。従って、ある星の光度 L は、 B に星の表面積を掛けたものに等しい。即ち、星の半径を R とすると、

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (8.15)$$

である。これより、

- 温度が同じ(色が同じ)であれば、大きい星ほど光度が大きい(絶対等級が明るくなる)
- 光度(絶対等級)が同じであれば、大きい星ほど温度が低く(色が赤く)なる

ことがわかる。



8.5 HR 図

Hertzsprung と Russel により独立に発見。

主系列星 (Main-Sequence) 大半の恒星。寿命のほとんどをここで過ごす。
水素の核融合反応。

赤色巨星 (Red Giant) 低温、にもかかわらず明るい 表面積大きい。
進化の終盤。ヘリウム以降の燃焼。

超巨星 (Super-giant) 大体が不安定な星。

白色矮星 (White Dwarf) 高温で暗い コンパクト。
爆発できなかった星 ($M < 6 - 8M_{\odot}$) のなれの果て (芯)。

MS の左上 (OB 型星) は大質量 } 連星系の観測から判明
右下に行くにつれ、小質量 }

$$m_1 + m_2 = \frac{ka^3}{T^2} \quad \text{ケプラーの法則の応用}$$

星の進化を理解する基礎。

8.6 星のスペクトル型

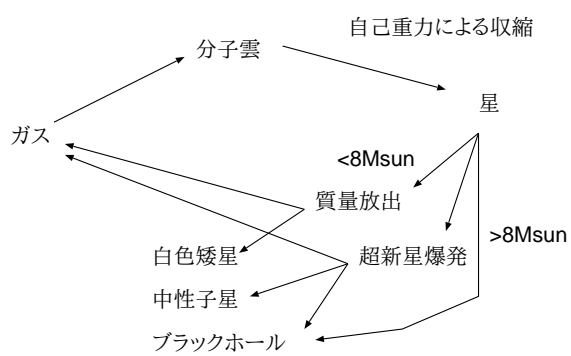
実際の星は、完全な黒体ではない。
 スペクトル中に暗線が見える
 星の大気による吸収
 星の外層...温度低い　イオン化していない原子が存在
 特定の波長の光を吸収
 吸収スペクトル線の違いにより星を分類する(図3-4)
 星の表面温度が変わると吸収に寄与する元素が変わる
 スペクトル型　温度(表3-1)

O-B-A-F-G-	K-M	}	化学組成の違い
	R-N		
	S		

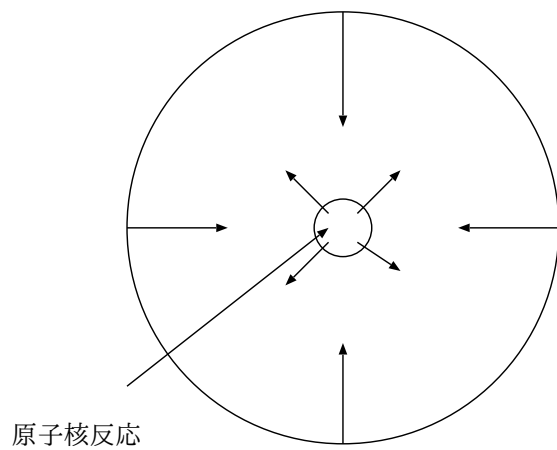
覚え方(覚えなくても良い)
 Oh, Be A Fine Girl, Kiss Me Right Now, Smack!

第9章 星の進化

物質のサイクル



恒星はエネルギーを放出し続けている
 重力でつぶれようとする力に対抗
 エネルギー放出がとまると、星は進化の新たな段階



9.1 重力エネルギーの解放

重力=ガス圧：静水圧平衡

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \quad (9.1)$$

$$\rightarrow \frac{P}{R} \simeq \frac{GM\rho}{R^2} \quad (9.2)$$

R をはらい、両辺に星の体積 $V(\simeq R^3)$ をかける：

$$PV \simeq \frac{GM^2}{R} \quad (9.3)$$

理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ (n :mol 数) より、

$$nRT \simeq \frac{GM^2}{R} \quad (9.4)$$

左辺：内部エネルギー $U = \frac{3}{2}nRT$

右辺：重力ポテンシャル(位置)エネルギー $\Omega \simeq -GM^2/R$

- $F = GMm/R^2 = mg \rightarrow g = GM/R^2, \Omega = mgh \simeq F \times h$

きちんと計算すると、 $\gamma = 5/3$ のとき、

$$2U + \Omega = 0 \text{ (ビリアル定理)} \quad (9.5)$$

- \leftrightarrow 重力と遠心力のつりあい

$$\frac{MV^2}{R} \simeq \frac{GM^2}{R^2} \rightarrow 2 \times \frac{1}{2}MV^2 - \left(-\frac{GM^2}{R}\right) = 0$$

一方、全エネルギーは $E = U + \Omega$ 、これにビリアル定理 $\Omega = -2U$ を代入すると、 $E = -U = \Omega/2 < 0$ となる。

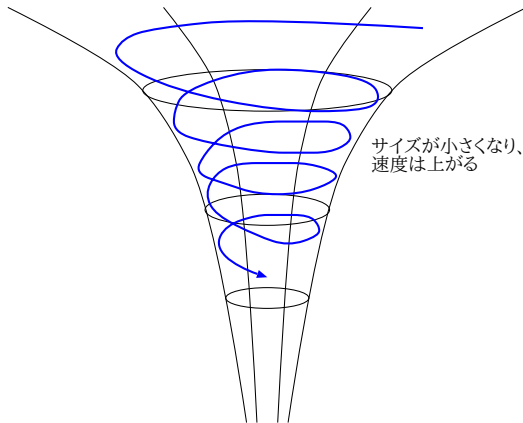
ここで、 $U \propto T, \Omega \propto -1/R$ に注目する。このガス球は有限の温度を持っているので、輻射によりエネルギーが抜けていく。つまり、 E が小さくなる。すると、

$$E \downarrow \Rightarrow U \uparrow, \Omega \downarrow \Rightarrow T \uparrow, R \downarrow \quad (9.6)$$

\Rightarrow 温度が上昇し、サイズが減少

\Rightarrow 実効的な比熱が負であることを示す。

もし太陽が重力収縮で輝いていたら？



太陽のエネルギー放出率	$L_{\odot} = 4 \times 10^{26} \text{ [W]}$
半径	$R_{\odot} = 7 \times 10^8 \text{ [m]}$
質量	$M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ [kg]}$
重力定数	$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ [m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\text{]}$

太陽の寿命を τ とすると、

$$\tau = \frac{\text{重力ポテンシャルエネルギー}}{\text{エネルギー放出率}} = \frac{GM_{\odot}^2/R_{\odot}}{L_{\odot}} \simeq 3 \times 10^7 \text{ [yr]} \quad (9.7)$$

⇒ 重力エネルギーだけでは、1 千万年程度の年齢になる

⇒ 別のエネルギー源が必要

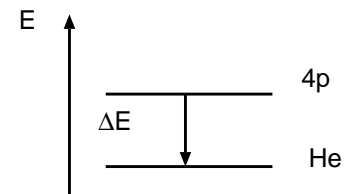
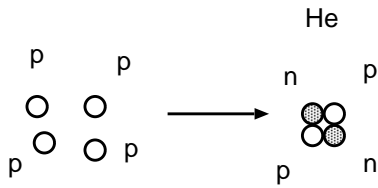
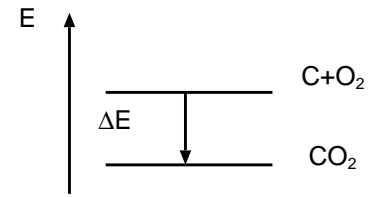
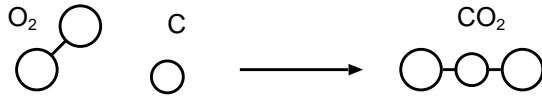
このメカニズムで光っているのが「原始星」

9.2 核エネルギー

→ 恒星のエネルギー源

水素原子核 (陽子) の「燃焼」(核融合反応) が主系列星のエネルギー源

- 化学反応による燃焼
(例) $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$
- 原子核反応による「燃焼」(数百万度でおきる)
(例) $4 {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + \text{ニュートリノ} + \text{陽電子}$
崩壊 $n \rightarrow p + \bar{\nu}_e + e^-$ の逆反応 $p \rightarrow n + \nu_e + e^+$ が起きている



反応前後のエネルギー差 ΔE が放出される
 ΔE の大きさは、結合の強さで決まっている

化学結合 (電磁気力) \ll 原子核結合 (核力)
 \Rightarrow 莫大なエネルギーが放出される

どれくらいの違いか？

Einstein の特殊相対性理論 (1905)

質量とエネルギーは等価

$$E = mc^2 \quad (E: \text{エネルギー、} m: \text{静止質量、} c: \text{光速})$$

(cf. 運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$)

エネルギーが放出される \leftrightarrow 質量が減る

4H \rightarrow He の反応では、約 0.7% の質量が減る

- 4g の H が He(1mol) に変換される場合

$$E \simeq 0.007 \times 6 \times 10^{23} \cdot 4m_p c^2 \simeq 2.6 \times 10^{12} [\text{J}]$$

これは 100[W] の電球 1000 個を 1 年間つけっぱなしにした時の電力に相当

$$2.6 \times 10^{12} [\text{J}] / 3 \times 10^7 [\text{s}] \simeq 10^5 [\text{W}]$$

化学反応の場合：

C+O₂ \rightarrow CO₂ の反応で、1mol 当たり 4×10^5 [J]

質量欠損は、 $\Delta M = E/c^2 = \frac{4 \times 10^5}{(3 \times 10^8)^2} \simeq 5 \times 10^{-12}$ [kg]

CO₂ 1mol は 44[g] = 4.4×10^{-2} [kg] なので、約 10^{-10} 、つまり 10^{-8} % 程度の質量の減少

太陽の寿命

- 約 1 割の水素が一生の間に燃える
- 反応した水素の約 0.7% がエネルギーとして放出

$$\begin{aligned} \tau &\simeq \frac{0.1 \cdot 0.007 \cdot M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} \\ &\simeq \frac{0.1 \cdot 0.007 \cdot 2 \times 10^{30} \cdot 9 \times 10^{16}}{4 \times 10^{26}} [\text{s}] \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\simeq 10^{10} [\text{yr}] \quad (9.9)$$

\Rightarrow 約 100 億年

宿題 5

- 1[g] の H を He にした時
- 1[g] の C を CO₂ にした時

何 [g] の 0 の水を沸騰させられるか？

生成したエネルギーはすべて温度の上昇に使われるものとする。

9.3 星の進化段階

中心部で水素の燃焼が進む (p-p chain, CNO cycle) 主系列星

大質量星ほど L 大、 $L \propto M^{3.5}$, $\tau \propto M/L \propto M^{-2.5}$

↓

燃えカスの He が中心にたまる

↓

大量にたまると、中心にエネルギー源がないので、重力で収縮する コア

↓

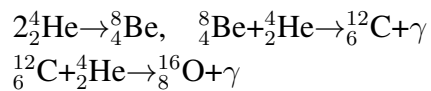
He コア中心の温度が上昇し、He が燃え出す

↓

外層が膨張する

↓

表面温度が下がり、赤色巨星になる



やがて、C+Oのコアも収縮する

温度が十分高くなり、C,Oが燃える より重い元素が合成、Ne,Mg,... Fe

超新星爆発 or ブラックホール

温度が十分高くない場合 電子の「縮退圧」で支える (パウリの排他律に基づく)

そのまま冷えて、白色矮星に。(外層はコアの収縮時に周囲に飛ばされる惑星状星雲)

第10章 銀河系と銀河

10.1 銀河 (galaxies)

- 星の集団
質量 $M \sim 10^7 \sim 10^{12} M_{\odot}$ (連続的に分布)
(矮小銀河 [多]-巨大銀河 [少])
- 多様な形態
 - 渦巻銀河 (spiral, S): ガスを持ち、新たな星が作られ続けている
 - レンズ状銀河 (lenticular, L): S と E の中間、ガスはほとんどない
 - 楕円銀河 (elliptical, E): 球状 (楕円体)。ガスがほとんどなく、古い星が多い
 - 不規則銀河 (irregular, Irr): 決まった形を持たない

10.2 銀河系 (The Galaxy)

我々の銀河系...Our Galaxy

天の川銀河...The Milky Way

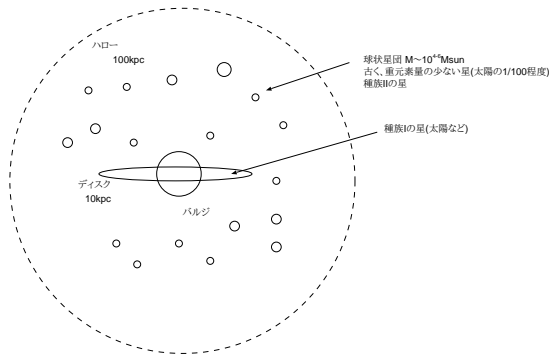
$M \sim 10^{12} M_{\odot}$ の立派な渦巻銀河 (棒渦巻かも?)

$R \sim 10\text{kpc}$, 厚み $< 1\text{kpc}$

銀河中心から太陽までの距離 8.5kpc

我々は銀河系のはずれにいる

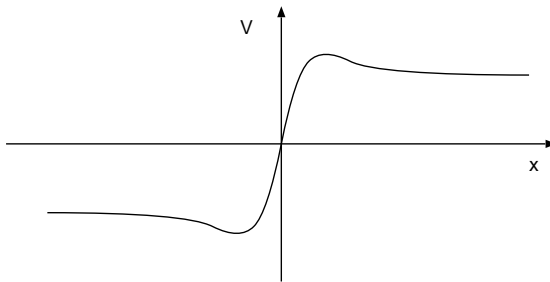
バルジサイズ $\sim 3\text{kpc}$



10.3 ディスクの回転曲線

ディスクは回転している (遠心力=重力)

回転速度：ほぼ半径に依らず、 $V \simeq 220[\text{km/s}]$



ほとんどの渦巻銀河で成り立つ(ドップラー効果で速度をはかる)

・銀河の密度分布

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad (10.1)$$

M : r より内側の質量。球対称と近似すると、

$$M \simeq \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \sim \rho r^3 \quad (10.2)$$

$\rho(r)$ は半径 r での密度。これより

$$v^2 \sim \frac{G}{r} \rho r^3 \propto \rho r^2 \quad (10.3)$$

観測結果から v は一定であるので、

$$\rho \propto r^{-2} \quad (10.4)$$

しかし、 $v = \text{const.}$ は、星がほとんどないところでも成り立っている
見えていない巨大な質量があることを示唆
ダークマター (章末問題 2.2 を参照)

宿題 6

太陽が銀河を一周するのにかかる時間を求めよ。銀河中心から太陽までの距離を 8.5kpc、回転速度を 220km/s とする。

第11章 宇宙論

11.1 オルバースのパラドックス

「宇宙は無限か有限か？」...はるか昔からの問

- ニュートンの宇宙観

静的かつ無限

- オルバースのパラドックス ニュートンモデルの矛盾

「宇宙が無限、静的で一様ならば、夜は明るい」

広い範囲でムラをならせば、近くも遠くも同様である

星の明るさ密度： $\rho_L (= \sum_i L_i / V)$ 場所によらず一定とする (一様性)

半径 r 、厚み dr の球殻内の星からのエネルギーフラックス

$$df = \frac{dL}{4\pi r^2}, \quad dL: \text{球殻内の星の明るさの総和}$$

$dL = 4\pi r^2 \rho_L dr$ より、

$$df = \rho_L dr$$

すべての r からの寄与を足し合わせると、

$$f = \int_0^{\infty} \rho_L dr \rightarrow \infty$$

夜空は無限に明るい

「宇宙膨張」により解決される

11.2 膨張宇宙

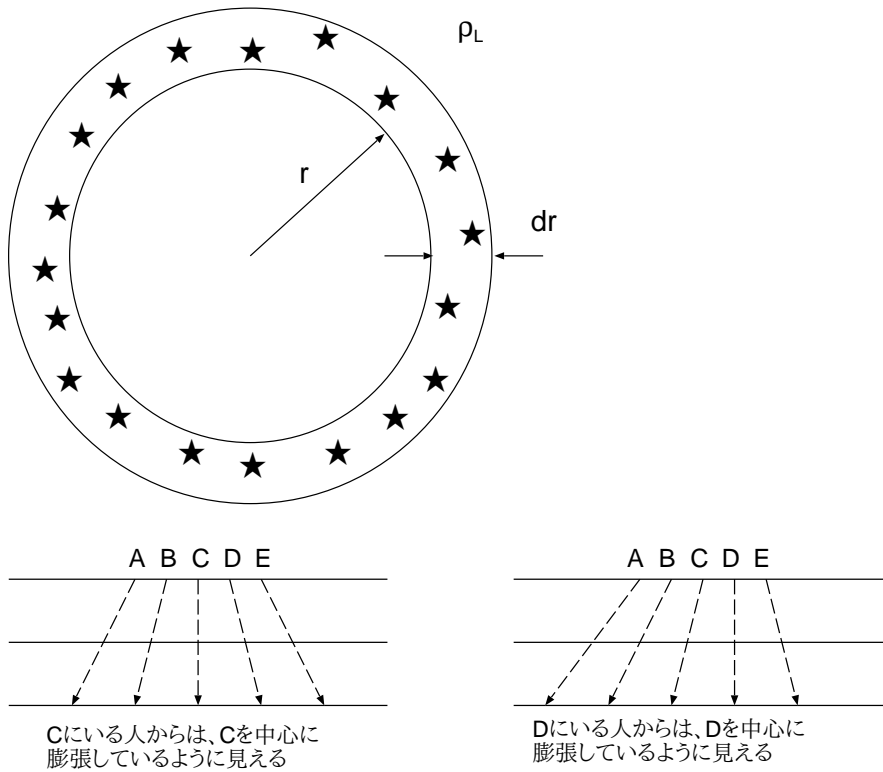
空間そのものの膨張。

遠い天体ほど速く遠ざかるように見える

ハッブルの法則

$$v = Hr$$

v : 銀河の後退速度



r : 銀河の距離

H : ハッブル定数

- v : 光のドップラー効果により測定
スペクトル中の輝線・吸収線のズレを調べる
 $v \ll c$ のとき、

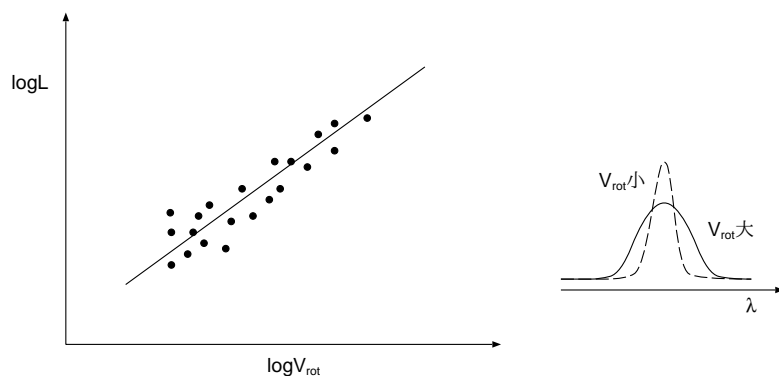
$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}, \quad z: \text{赤方偏移 (redshift)} \quad (11.1)$$

($v \sim c$ のときは、相対論が必要)

- r : 近い銀河はセファイド型変光星
遠い銀河はタリー・フィッシャー関係など

$$L \propto V_{\text{rot}}^\alpha, \quad \alpha \simeq 4.$$

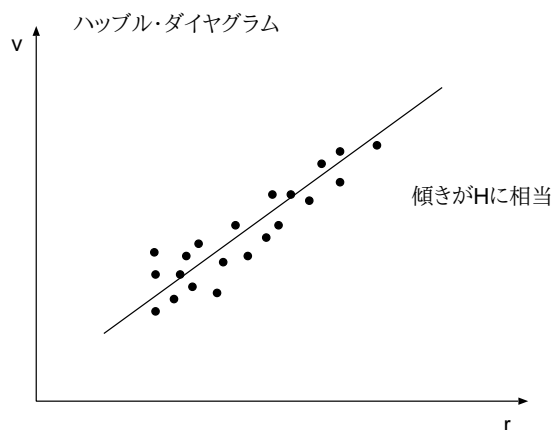
- 明るい銀河ほど速く回転
- 輝線幅から回転速度を見積る



- L と f から d を求める

ハッブルダイアグラム

ハッブルは当初 $H \simeq 500$ [km/s/Mpc] とした。

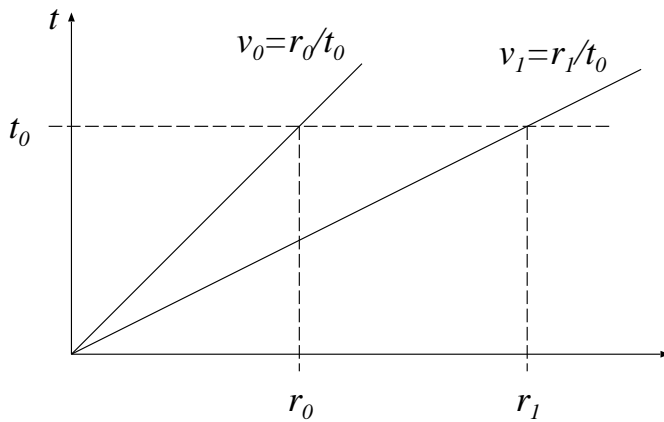


その後、距離測定の精度が上がり、 $H \simeq 70$ [km/s/Mpc] に。

$H = 72 \pm 8$ [km/s/Mpc] (Freedmann et al. 2001): ハッブル宇宙望遠鏡による

H の意味

- $H = v/r$: 単位長さ当たりの膨張速度 膨張率
通常、1Mpc 離れた距離での後退速度。
- 簡単のため、等速膨張とする ($v = \text{const.}$)
 r_0 離れた銀河: $t_0 = r_0/v_0 = 1/H$ には $r = 0$
 r_1 離れた銀河: $t_1 = r_1/v_1 = 1/H$ には $r = 0$
 以上より $t_0 = t_1$, 同じ時刻に一点に



宇宙のはじまり
ビッグバン宇宙論へ

オルバースのパラドックス再び

膨張宇宙では、

- 宇宙年齢が有限 ($t \sim 1/H$)
- 光速が有限
(この2つより) 見える範囲が有限
- ドップラー効果により光の波長がのびる
 $E = h\nu = hc/\lambda$ より、エネルギーが落ちる

より、パラドックスは解決される。

時間をさかのぼると？

断熱圧縮 温度上昇 ビッグバン宇宙

宿題 7

$H = 50, 72, 100[\text{km/s/Mpc}]$ のとき、

- $1/H$ より大体の宇宙年齢を億年で求めよ
- c/H より大体の宇宙の観測できる範囲を Mpc で求めよ

実際の宇宙年齢：

- 物質間の重力により、膨張にブレーキがかかる 減速
- 「真空のエネルギー」(ダークエネルギー、宇宙項、など) 加速

最新の観測結果では、宇宙年齢は約 137 億年

11.3 ニュートン力学モデル

宇宙の質量を M 、半径を R とし、そこでの膨張速度を V とする。エネルギー保存則より、単位質量あたりのエネルギーは

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R} = E \equiv -\frac{K}{2} = \text{const.} \quad (11.2)$$

ここで $M = 4\pi\rho R^3/3$ より、

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho R^2 = -\frac{K}{2} \quad (11.3)$$

$$\implies \frac{V^2}{R^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{K}{R^2} \quad (11.4)$$

なお、密度 ρ は、

- 通常物質： $\rho \propto R^{-3}$
- 輻射： $\propto R^{-4}$ (光子の密度が減り、さらにエネルギーも減る)
- 真空のエネルギー： $\propto R^0$ (空間の属性なので)

以上に注意して、

$$\frac{V^2}{R^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{K}{R^2} + \Lambda \quad (11.5)$$

ここでハッブル定数は $H = V/R$ なので、

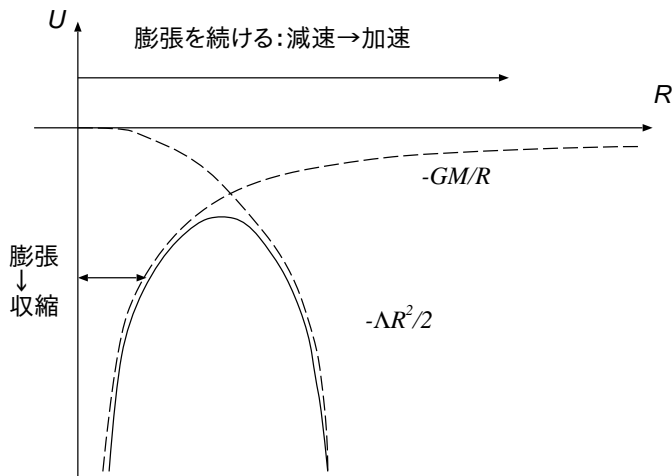
$$\frac{V^2}{R^2} = H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{K}{R^2} + \Lambda \quad (11.6)$$

フリードマン方程式

(正しくは、一様・等方を過程して一般相対論を解く)

元に戻すと

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R} - \frac{\Lambda}{2}R^2 = -\frac{K}{2} \quad (11.7)$$



$$T + U = E, T = V^2/2, U = -GM/R - \Lambda R^2/2, E = -K/2$$

宇宙論パラメータ

全体を H^2 で割る :

$$1 = \Omega - k + \lambda \quad (11.8)$$

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad k = \frac{K}{H^2 R^2}, \quad \lambda = \frac{\Lambda}{H^2} \quad (11.9)$$

$$\Omega + \lambda = 1 + k$$

k :空間の曲率、 $k > 0$: 閉じている、 $k = 0$: 平坦、 $k < 0$:開いている

最新の観測 : $\Omega \simeq 0.3, \lambda = 0.7 \Rightarrow k \simeq 0$: 空間は平坦、現在は加速膨張している

第12章 初期宇宙史

12.1 宇宙の誕生

宇宙はどのように始まったか？ よくわかっていない。

ミクロの世界の物理： 量子力学
 強い重力の物理： 一般相対性理論 } の融合が(少なくとも)必要

- 強い重力：シュバルツシルト半径
 重力による空間の歪みのため、光すら脱出できなくなる半径 ブラックホール

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

ニュートン力学的には脱出速度=光速となる半径、 $c^2/2 - \frac{GM}{r} = 0$

- 量子力学：コンプトン波長
 不確定性原理: 運動量 \times 位置 $\gtrsim \hbar$

$$p \cdot r \gtrsim \hbar$$

光速で運動している粒子： $p \simeq mc \implies r \gtrsim \frac{\hbar}{mc}$
 コンプトン波長を

$$\lambda \equiv \frac{h}{mc}$$

と定義する。

- プランク質量
 シュバルツシルト半径 \simeq コンプトン波長となる時の質量。量子力学と一般相対論の両方の効果が重要になる。

$$\frac{Gm}{c^2} \simeq \frac{\hbar}{mc} \implies m_p \equiv \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \simeq 2.176 \times 10^{-8} [\text{kg}]$$

図 12.1: 『観測的宇宙論』池内了(東京大学出版会)

- プランク長(プランク質量に対応する長さ)

$$l_p \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} \simeq 1.616 \times 10^{-35} [\text{m}]$$

- プランク時間
光がプランク長を進むのに要する時間

$$t_p \equiv \frac{l_p}{c} = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} \simeq 5.391 \times 10^{-44} [\text{s}]$$

宇宙誕生後、 t_p 以降、 l_p 以上の大きさの宇宙に対しては、現代物理学の枠組で理解できる(と考えられている)。

12.2 自然界における4つの力

すべての力は4種の力(相互作用)に還元される。

		媒介粒子	
強い力	クォークに作用	核力	グルーオン
電磁力	電荷を持つ粒子		光子 ($m = 0$)
弱い力	すべての粒子		W^\pm ボソン、 Z^0 ボソン
重力	質量を持つ粒子		重力子? ($m = 0$)
$m = 0$ のコンプトン波長		∞	
$m > 0$ のコンプトン波長		有限	力の到達範囲

1. 核力

媒介粒子: 中間子、 $m \simeq 200[\text{MeV}/c^2]$

1[eV]: 1[V] の電位差で 1[C] の電荷が得るエネルギー、 $1.6 \times 10^{-19}[\text{J}]$ 。

コンプトン波長 $\lambda \simeq \frac{\hbar}{mc} \simeq 10^{-15}[\text{m}]$ ~ 原子核のサイズ

核力のおかげで電気的な反発力に対抗して原子核は結合してられる

湯川は「媒介粒子の質量はコンプトン波長が粒子程度のはず」であると考え、

$m \simeq 200[\text{MeV}]$ の未知の粒子を予言した ノーベル賞

2. 電磁力

光子の質量=0 力の到達距離無限大

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

実際には有限にとどまる 異符号の電荷が集まり打ち消される

- 原子核 (+) と電子 (-) が結合
- デバイ遮蔽：プラズマ中で電子が寄ってくる

$$F \propto \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r^2} \text{ 湯川型、}\lambda_D : \text{ デバイ長}$$

3. 重力

- 重力子の質量=0 と予想
- 負の質量は存在しない

到達距離が無限

力としては弱い、長距離(天体スケール)で重要になる。

力はもともと一種だった？

電磁力...電気力と磁気力の統一

高エネルギー状態...電磁力と弱い力が統一される 電弱統一理論

ワインバーグ、サラム、グラシヨウ...ノーベル賞(素粒子の標準モデル)

さらに高エネルギー

電弱力と強い力の統一？(大統一理論、Grand Unified Theory: GUT)

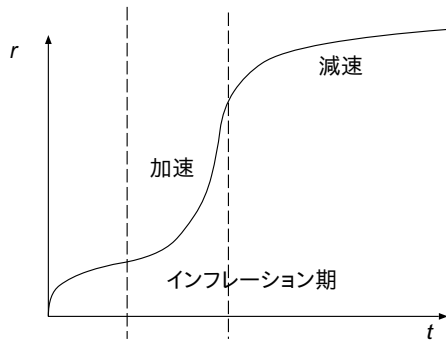
重力も統一？...プランクスケールを越えた場合？

...「力の分岐」...一種の相転移

インフレーション

宇宙は数回にわたり相転移を経験してきた

Λ が生成 急激な膨張？



12.3 ビッグバン元素合成

宇宙初期...高温(断熱圧縮)

粒子の反応率 > 宇宙の膨張率 の場合、宇宙は熱平衡状態(ほぼ一様)

- 対称性の破れ
 - なぜこの宇宙は反物質ではなく物質でできているのか(非対称)?
 - 弱い力には対称性を破る性質がある
 - 強い力の分岐が起こる時(クォークが生成する時)、クォークが反クォークよりわずかに多かった?
 - ほとんどのクォークは反クォークと対消滅、差額が現在の物質のもと数の違い... 10^{-9} 程度
- 元素の誕生
 - ある程度温度が下がる クォークが p, n に閉じこめられる
 - p+n の原子核反応開始
 - 反応率 < 膨張率で反応止まる ($t \sim 10^2$ [s]; 「宇宙最初の3分間」)
 - この時までには、He, Li が合成される。
- 星による He 合成
 - 150億年程度では、高々2-3%しか H を He に変えられない
 - ビッグバンの証拠

12.4 宇宙マイクロ波背景放射

元素合成以降... p^+ , e^- のプラズマ

宇宙膨張により温度が下がる(断熱膨張)

$p^+ + e^- \rightarrow H$ のみ進む(中性化) 「再結合」

さらに温度下がる
 膨張率 > 反応率 (再結合率) となり、そのまま「凍結」
 10^{-4} 程度が e^- として残る ほぼ中性化
 $z \simeq 10^3, T \simeq 3000[\text{K}]$

光は電荷を持つ粒子により散乱しやすい 中性化により透明になる

- 我々は $z \sim 10^3$ の宇宙を見ることができる
- $T \sim 3000[\text{K}]$ の黒体輻射
- ただし宇宙膨張により $T_{\text{obs}} \sim \frac{T}{1+z} \sim 3[\text{K}]$ の輻射として観測
 ウィーンの変位則より、

$$\lambda \simeq \frac{3 \times 10^{-3}}{T} [\text{K} \cdot \text{m}] = 10^{-3} \left(\frac{T}{3\text{K}} \right) [\text{m}] = 1[\text{mm}] \left(\frac{T}{3\text{K}} \right)$$

マイクロ波 ($\lambda \simeq 0.1\text{mm}-1\text{m}$)

- 1965年、ペンジャスとウィルソンにより偶然発見
 アンテナの雑音を減らそうとしていた
 しかし、どこに向けても一定の雑音が残った
 その20年前、ガモフらが、ビッグバン理論により背景輻射を予言していた
 ペンジャスとウィルソンにノーベル賞

ビッグバンを支持する3つの証拠

- 宇宙膨張 ハッブルの法則
- ビッグバン元素合成 ヘリウム、リチウムの量
- 宇宙背景輻射

天文学 講義ノート

2009 年 12 月 7 日 初版発行

2010 年 10 月 5 日 第 2 版

2011 年 10 月 11 日 第 3 版

2012 年 9 月 28 日 第 4 版

長島雅裕 (長崎大学教育学部)

<http://astro.edu.nagasaki-u.ac.jp/~masa/>
