

2009年度講義ノート

# 地学概論 - 気象分野 -



# はじめに

## 気象学 (*meteorology*)

特徴...基礎から実利まで幅が広い

e.g. 乱流、カオス( 数理科学)

e.g. 天気予報

この講義の目的：

気象現象を理解するための基礎を学ぶ

気象学=(地球+太陽環境)+(熱力学、流体力学、輻射の物理)

(ただし、他惑星の気象学もある)

現象を覚えるのではなく、本質を理解すること

### 受講に当たって

- 数式が随所に出てきます。難しいものではありません。考えれば、必ず理解できます。重要なのは、考えること、です。考えたつもりになること、ではありません。理解できないならば、それは、まだ「考えた」段階まで達してはいないのだと思ってください。
- 数学は自然界の言語です。外国語を習得すればその国についての理解が格段に深まります。ちょっとした挨拶だけでも、まったく言葉を知らないのとは雲泥の差です。自然も同様です。ちょっとした数学を使うだけで、自然に対する理解が一気に深まります。
- 多様な自然の性質を一つ一つ暗記するのは不可能ですし、また新しい現象に出会った場合に対処のしようがありません。現象の背後にある本質はなにか、ということのを常に意識してください。

### 勉強するための文献

- 『新しい高校物理の教科書』(山本明男、左巻健男) 講談社ブルーバックス  
気象は応用物理でもあります。物理的発想を習得してください。
- 『新しい高校地学の教科書』(杵島正洋、松本直記、左巻健男) 講談社ブルーバックス  
複雑な自然現象を論理的に記述してあります。とっかかりとしては最適でしょう。
- 『基礎気象学』(浅井富雄、新田尚、松野太郎) 朝倉書店  
『一般気象学』(小倉義光) 東京大学出版会  
この2冊の内容(の一部)を主に講義します。
- 『気象の教室 6 気象の教え方学び方』(名越利幸、木村龍) 東京大学出版会  
内容については触れませんが、小中学校の気象分野で授業を組み立てる際に参考になるかもしれません。

# 目次

<b>第1章</b>	<b>地球大気の起源</b>	<b>7</b>
1.1	太陽系の形成 . . . . .	7
1.2	原始地球 . . . . .	8
1.3	気体の脱出 . . . . .	10
<b>第2章</b>	<b>地球大気の構造</b>	<b>15</b>
2.1	太陽放射 . . . . .	15
2.2	吸収と散乱 . . . . .	15
2.3	放射(輻射) . . . . .	16
2.4	エネルギー収支 . . . . .	18
2.5	大気の鉛直構造 . . . . .	18
<b>第3章</b>	<b>大気の熱力学</b>	<b>19</b>
3.1	理想気体の状態方程式 . . . . .	19
3.2	静水圧(静力学)平衡 . . . . .	21
3.3	熱力学第一法則 . . . . .	23
3.4	断熱変化 . . . . .	24
3.5	相変化 . . . . .	26
3.6	大気中の水分 . . . . .	27
3.7	湿潤断熱減率 . . . . .	29
3.8	(静的)安定性 . . . . .	31
<b>第4章</b>	<b>雲と降水の物理</b>	<b>33</b>
4.1	エアロゾルと凝結核 . . . . .	33
4.2	雲粒の成長 . . . . .	34
4.3	雨粒の成長 . . . . .	34
4.4	氷粒の成長 . . . . .	35
4.5	雲 . . . . .	36

<b>第 5 章</b>	<b>大気の運動</b>	<b>37</b>
5.1	極座標での運動方程式 . . . . .	37
5.2	コリオリ力 (転向力) . . . . .	38
5.3	地衡風 . . . . .	40
5.4	温度風 . . . . .	40
5.5	地表面摩擦 . . . . .	40
5.6	温帯低気圧の発生・成長、前線と天気の変化 . . . . .	41
<b>付録 A</b>	<b>微分と積分</b>	<b>43</b>

# 第1章 地球大気の起源

## 1.1 太陽系の形成

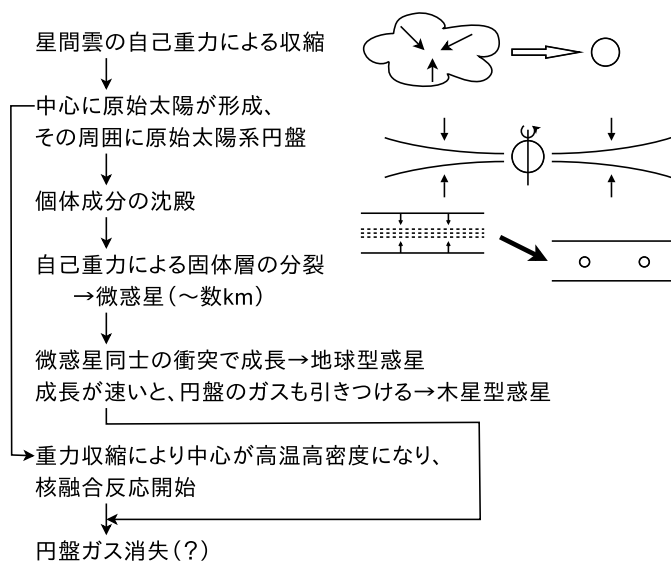
宇宙の誕生 (ビッグバン)...約 137 億年前

最初の 3 分間...水素 (陽子)、ヘリウム、リチウムの原子核が合成

銀河の誕生...ビッグバン後、数億年?

星の形成、大質量星の超新星爆発...重たい元素の合成

太陽・地球の誕生...約 50 億年前



京都モデル

## 1.2 原始地球

一次大気... 重力により捕獲した円盤ガス 木星型惑星の大気  
地球の場合、初期太陽から活発に放出された太陽風(電離ガス)により、吹き飛ばされたと考えられている

二次大気... 固体から脱出したガス(脱ガス)  
-微惑星の衝突  
-火山  
地球史初期に大規模に起こったと考えられている

### 原始大気の組成

H<sub>2</sub>O 88% 温室効果ガス

CO<sub>2</sub> 6%

N<sub>2</sub> 2%

... ..

### 海洋の誕生

脱ガスにより大量の H<sub>2</sub>O が放出 過飽和  
降雨により海をつくる(現在、地球の H<sub>2</sub>O の 97% が海水)

### 現在の大気へ

- 硫黄、塩素等が海水に溶け込む  
酸性の海。CO<sub>2</sub> は溶けない N<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub> の大気
- 陸上の金属イオンが海に流れこむ (Ca<sup>2+</sup>, Mg<sup>2+</sup>, Na<sup>+</sup>, K<sup>+</sup> など)  
中性化。CO<sub>2</sub> 溶ける N<sub>2</sub> の大気  
↳ CaCO<sub>3</sub> (炭酸カルシウム) の固体になる

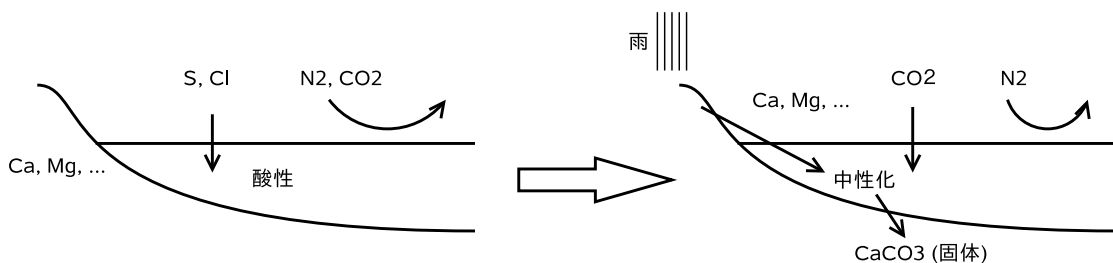


図 1.1: 海の中性化と CO<sub>2</sub> の海への溶解。

大気に N<sub>2</sub> が残る



- 地球上の水が水蒸気に、石灰岩や石油等の炭素がCO<sub>2</sub>になったとすると、分圧比は

$$P_{\text{H}_2\text{O}} : P_{\text{CO}_2} : P_{\text{N}_2} : P_{\text{Ar}} \simeq 90.7 : 9.1 : 0.2 : 0.002$$

火山ガスの成分比にほぼ等しい

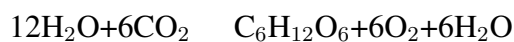
図 1.2: CO<sub>2</sub> のサイクル。『一般気象学』図 1.5 より

### 酸素の起源

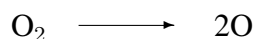
- 物理的 (一部)

水蒸気が紫外線 (0.1-0.2 $\mu\text{m}$ ) を吸収  $\xrightarrow{\text{水素原子 と酸素原子に解離}}$  軽いので地球から脱出 (後述)  
酸素原子 一部は O<sub>2</sub> に、一部は酸化物の合成に (酸化鉄など)

- 植物による光合成



38 – 35 億年前 バクテリアが光合成開始 } 紫外線 (有害) は海中をあまり  
20 億年ほど前 藍藻類が発生 O<sub>2</sub> } 透過しないため海中で発生



$\lambda < 0.24\mu\text{m}$  の UV 光



オゾンは UV を吸収する

海面近くで繁殖可能

より多くの可視光を受け、光合成活発に

O<sub>2</sub> が増す

UV さらに弱くなる

約 4 億 2000 万年前 生物が陸上に進出

CO<sub>2</sub> 循環の図、現在の組成比を確認しておこう

成分	分子式	分子量	存在比率 (%)	
			容積比	重量比
窒素分子	N <sub>2</sub>	28.01	78.088	75.527
酸素分子	O <sub>2</sub>	32.00	20.949	23.143
アルゴン	Ar	39.94	0.93	1.282
二酸化炭素	CO <sub>2</sub>	44.01	0.03	0.0456
一酸化炭素	CO	28.01	1×10 <sup>-5</sup>	1×10 <sup>-5</sup>
ネオン	Ne	20.18	1.8×10 <sup>-3</sup>	1.25×10 <sup>-3</sup>
ヘリウム	He	4.00	5.24×10 <sup>-4</sup>	7.24×10 <sup>-5</sup>
メタン	CH <sub>4</sub>	16.05	1.4×10 <sup>-4</sup>	7.25×10 <sup>-5</sup>
クリプトン	Kr	83.7	1.14×10 <sup>-4</sup>	3.30×10 <sup>-4</sup>
一酸化二窒素	N <sub>2</sub> O	44.02	5×10 <sup>-5</sup>	3.48×10 <sup>-5</sup>
水素分子	H <sub>2</sub>	2.02	5×10 <sup>-5</sup>	3×10 <sup>-6</sup>
オゾン	O <sub>3</sub>	48.0	2×10 <sup>-6</sup>	1×10 <sup>-6</sup>
水蒸気	H <sub>2</sub> O	18.02	不定	不定

表 1.1: 地表付近の大気組成。『一般気象学』表 1.4 より。

### 1.3 気体の脱出

大気の上層部からは、速度の大きい分子が地球の重力をふりきり宇宙空間に脱出する。

- hydrodynamic escape (気体の流出)
- Jeans escape (気体の蒸発)
- 脱出速度 (escape velocity)  
脱出...無限遠で速度が少なくとも 0(非負)

地表付近での質量  $m$  の分子に対する重力 (万有引力)... $F = -\frac{GMm}{R^2}$

$R$ : 地球半径、 $\simeq 6.4 \times 10^6$ [m]

$M$ : 地球質量、 $\simeq 6.0 \times 10^{24}$ [kg]

$G$ : 万有引力定数、 $\simeq 6.7 \times 10^{-11}$ [m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>]

$$\left[ \begin{array}{l} \text{運動方程式 } ma = F \\ \rightarrow ma = \frac{GMm}{R^2} @ \text{地表} \\ \rightarrow a = \frac{GM}{R^2} \equiv g(\text{重力加速度}) \end{array} \right.$$

位置エネルギー

$$U = - \int_{\infty}^r F dr = - \int_{\infty}^r \left( -\frac{GMm}{r^2} \right) dr = \left[ -\frac{GMm}{r} \right]_{\infty}^r = -\frac{GMm}{r}$$

無限遠を、位置エネルギー=0にとる

$$\left[ \begin{array}{l} \text{地表付近では、} U = -\frac{GMm}{R+h} \simeq -\frac{GMm}{R} \left( 1 - \frac{h}{R} \right) = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2} h \\ \text{第一項は定数なので、これがゼロになるように基準を設定しなおすと、} \\ U = \frac{GMm}{R^2} h = m \frac{GM}{R^2} h = mgh \end{array} \right.$$

運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv^2$$

全エネルギーは保存、また  $r \rightarrow \infty$  で  $v = 0$ ,  $r = R$  で  $v = v_e$  とすると、

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \quad (1.1)$$

$$\Rightarrow v_e^2 = \frac{2GM}{R}, \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \text{分子量に依らない} \quad (1.2)$$

一般に、 $v_e = \sqrt{2GM/R}$  を脱出速度と呼ぶ。

地球を基準に考える ( $M = M_E, R = R_E$ )

$$\begin{aligned} v_e &= \left[ \frac{2GM}{R} \right]^{1/2} = \left[ \frac{2GM_E}{R_E} \right]^{1/2} \left( \frac{M}{M_E} \right)^{1/2} \left( \frac{R}{R_E} \right)^{-1/2} \\ &= \left[ \frac{2 \times 6.7 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6} \right]^{1/2} \left( \frac{M}{M_E} \right)^{1/2} \left( \frac{R}{R_E} \right)^{-1/2} \\ &= 1.12 \times 10^4 \left( \frac{M}{M_E} \right)^{1/2} \left( \frac{R}{R_E} \right)^{-1/2} \quad [\text{m/s}] \\ &\simeq 11[\text{km/s}] \left( \frac{M}{M_E} \right)^{1/2} \left( \frac{R}{R_E} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

**宿題**

式(1.1)を出発点として  $v_e$  を表わす式(1.2)を導出せよ。また、地球、月、火星について質量と半径を調べ、それぞれの  $v_e$  を求めよ。

- hydrodynamic escape

大気が加熱され、上空へ向かって大局的な運動が生じ、流出する現象。  
温度  $T$ 、分子の質量  $m$  の気体の典型的な速度は、

$$\frac{1}{2}mv^2 \simeq \frac{3}{2}kT \left( \text{二原子分子の場合は} \frac{5}{2} \right) \longrightarrow v \simeq \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (1.4)$$

$v > v_e$  となると、気体の大局的な運動が生じ、惑星から大気が流出していく。

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \left( \frac{3 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 1000}{1 \times 1.7 \times 10^{-27}} \right)^{1/2} \left( \frac{T}{1000\text{K}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{m_H} \right)^{-1/2} \\ &= 5.0 \times 10^3 [\text{m/s}] \left( \frac{T}{1000\text{K}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{m_H} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

地球の場合、 $T \gtrsim 4000\text{K}$  程度で大局的な水素原子の流出が始まる。

- Jeans escape

大局的には大気は安定しているが、速度の大きい分子が蒸発する現象。

- 気体分子の速度分布

平衡状態では Maxwell-Boltzmann 分布になる。

$$v \equiv \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{速度の大きさ} \quad (1.6)$$

$$f_{\text{MB}}(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) \quad \text{3方向独立} \quad (1.7)$$

$$f(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_i^2}{2kT}\right), \quad (i = x, y, z) \quad (1.8)$$

ここで、 $m$  は分子の質量、 $k$  は Boltzmann 定数、 $T$  は温度。まとめると、

$$f_{\text{MB}}(v) = 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (1.9)$$

$kT/m$  が大きいほど、高速の分子が増える (高温なほど、質量が小さいほど)。即ち、脱出速度を越える ( $v > v_e$ ) 分子が増える。

- $v_e$  を越える原子の割合

水素原子 (H)、酸素原子 (O) について考えてみる。 $z$  方向に  $v_e$  を越える速度を持つ原子の割合は、

$$\begin{aligned} F_{e,i} &= \int_{v_e}^{\infty} f(v_z; m_i) dv_z \quad (i = \text{H, O}) \\ &= \int_{v_e}^{\infty} \sqrt{\frac{m_i}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{m_i v_z^2}{2kT}\right\} dv_z \end{aligned}$$

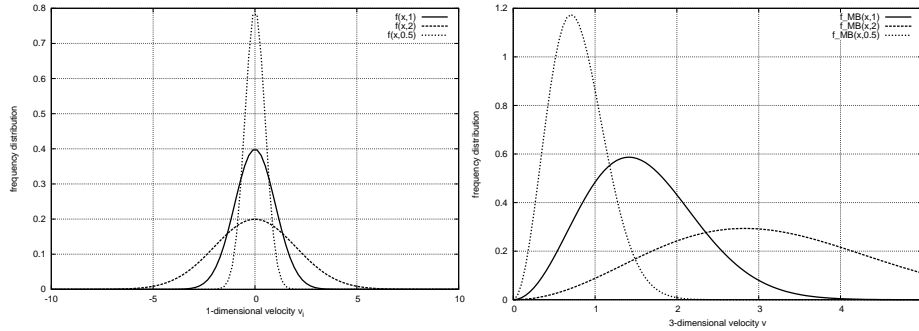


図 1.3: 正規 (ガウス) 分布に基づく気体分子の速度分布。

$$= \int_{t_{e,i}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \equiv \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(t_e) \quad t = \sqrt{\frac{m_i}{2kT}} v_z \quad (1.10)$$

相補誤差関数 (complementary error function)

$t_e$	$F_e$
1	$8 \times 10^{-2}$
2	$2 \times 10^{-3}$
3	$1 \times 10^{-5}$
5	$8 \times 10^{-13}$
10	$1 \times 10^{-45}$
15	$4 \times 10^{-100}$
20	$3 \times 10^{-176}$

外気圏下部... $T \simeq 600\text{K}$       水素原子の分子量  $M = 1$        $m_H = 1.7 \times 10^{-27}\text{kg}$   
 酸素原子の分子量  $M = 16$        $m_O = 2.7 \times 10^{-26}\text{kg}$

$$\begin{aligned} t_{e,i} &= \sqrt{\frac{m_i}{2kT}} v_e \\ &\simeq \sqrt{\frac{M \times 1.7 \times 10^{-27}}{2 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 600}} \times 1.1 \times 10^4 M^{1/2} \left(\frac{T}{600\text{K}}\right)^{-1/2} \left(\frac{v_e}{11\text{km/s}}\right) \\ &\simeq 3.5 M^{1/2} \left(\frac{T}{600\text{K}}\right)^{-1/2} \left(\frac{v_e}{11\text{km/s}}\right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} t_{e,H} &\simeq 3.5 & F_{e,H} &= 4 \times 10^{-7} \\ t_{e,O} &\simeq 14 & F_{e,O} &= 2 \times 10^{-87} \end{aligned}$$

$v > v_e$  の分子は速度  $v_e$  になって大気上層から脱出するとする (単純化)。  
 単位面積、単位時間あたり脱出する分子数

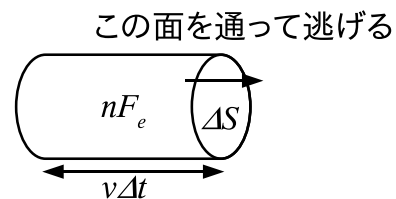
$$Q_e \simeq n v_e F_e \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} \Delta N = (nF_e)\Delta S v \Delta t \\ Q = \frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = nv \end{cases}$$

$$n(100\text{km}) \simeq 10^{-4} \text{mol/m}^3 \simeq 10^{19} \text{m}^{-3},$$

$$\rightarrow Q_e \simeq 1 \times F_e \text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$$

$$(\odot) v_e \simeq 10^4 \text{m/s}$$



単位面積当たりの総分子数は、

$$N \simeq nh \simeq 50 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \times 100\text{km} \simeq 5 \times 10^6 \text{mol/m}^2 \quad (1.13)$$

脱出のタイムスケールは、

$$\begin{aligned} \tau &\simeq \frac{N}{Q_e} \simeq \frac{5 \times 10^6}{F_e} [\text{s}] \\ \tau_H &\simeq \frac{5 \times 10^6}{4 \times 10^{-7}} \simeq 10^{13} [\text{s}] \simeq 3 \times 10^5 [\text{yr}] \ll t_H \quad (1 [\text{yr}] \simeq 3 \times 10^7 [\text{s}]) \\ \tau_O &\simeq \frac{5 \times 10^6}{2 \times 10^{-87}} \simeq 3 \times 10^{93} [\text{s}] \simeq 10^{86} [\text{yr}] \gg t_H \end{aligned} \quad (1.14)$$

ここで

$$t_H \equiv \text{宇宙年齢} \simeq 1.4 \times 10^{10} [\text{yr}]$$

水素はすぐに脱出するが、酸素は残る

## 第2章 地球大気の構造

### 2.1 太陽放射

エネルギー源...(ほぼ) 太陽

大気上端で単位面積・単位時間に受ける放射エネルギー

...平均  $1368[\text{W}/\text{m}^2]$ :太陽定数

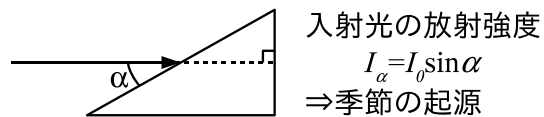


図 2.1: 季節の発生。

### 2.2 吸収と散乱

- 大気による吸収
  - 赤外線... $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$
  - 紫外線... $\text{O}_2$ ,  $\text{O}_3$
  - 可視光に対しては透明 ( $\lambda \simeq 0.4 - 0.7\mu\text{m}$ )

- 散乱
  - 入射波の波長  $\lambda$
  - 散乱体のサイズ  $r$

$\lambda \gg r$  Rayleigh 散乱、散乱光強度  $\lambda^{-4}$   
 気体分子  $r \sim 0.1\text{nm}$   
 青い色ほど散乱される

$\lambda \sim r$  Mie 散乱、 $\propto \lambda^0$   
 どの波長も同じように散乱される  
 エロゾル、雲粒(水滴) 白く見える

散乱体が大きくなると、Rayleigh 散乱 Mie 散乱にきりかわる。

太陽光線が反射されると地表に達するエネルギーが低くなるため、反射率は重要な量である。

反射率...アルベド

図 2.2: エネルギー収支及びアルベド。『基礎気象学』図 2.6, 2.4 より

	太陽からの 平均距離 [AU]	入射放射量 [W m <sup>-2</sup> ]	アルベド	放射平衡 温度 [K]	平均表面 温度 [K]	表面気圧 [atm]
金星	0.72	2.60 × 10 <sup>3</sup>	0.78	224	735	90
地球	1.00	1.37 × 10 <sup>3</sup>	0.30	255	288	1
火星	1.52	0.58 × 10 <sup>3</sup>	0.16	216	230	0.006
木星	5.20	0.05 × 10 <sup>3</sup>	0.73	88	130*	2*

表 2.1: いろいろの惑星の放射平衡温度など。『一般気象学』表 5.2 より。(\* 印は雲の表面における値)

## 2.3 放射(輻射)

「黒体」(black body)...入射放射を完全に吸収する

その温度で最大のエネルギーを放射

単位面積、単位時間、単位振動数(単位波長) 当たりに放出するエネルギー :

$$\begin{cases} B_\nu(T)d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \\ B_\lambda(T)d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} d\lambda \end{cases} \quad (2.1)$$

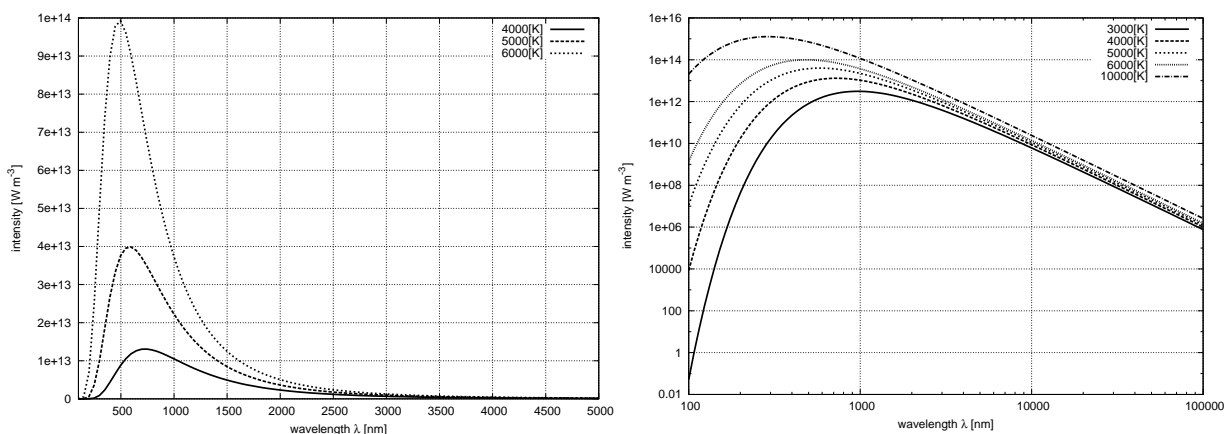


図 2.3: 黒体輻射。

積分すると、

$$I = \int B_\nu d\nu = \int B_\lambda d\lambda = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 \equiv \sigma T^4 \quad (2.2)$$



Stefan-Boltzmann の法則

$$\sigma \equiv \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} [\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}] \quad \text{Stefan - Boltzmann 定数} \quad (2.3)$$

最大強度となる波長  $\lambda_m$ :

$$\lambda_m = \frac{2897}{(T/\text{K})} [\mu\text{m}] \quad \text{Wien の変位則} \quad (2.4)$$

太陽... $T \simeq 6000\text{K}$      $\lambda_m \simeq 0.5\mu\text{m}$

人体、地表... $T \simeq 300\text{K}$      $\lambda_m \simeq 10\mu\text{m}$

全入射エネルギー=全放射エネルギー (放射平衡) のとき、

$$S(1 - A)\pi a^2 = 4\pi a^2 \sigma T_e^4 \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} S: & \text{太陽定数} = 1368 [\text{W m}^{-2}] \\ A: & \text{アルベド} = 0.3 \\ a: & \text{地球半径} = 6.4 \times 10^6 [\text{m}] \\ T_e: & \text{放射平衡温度} \end{cases}$$

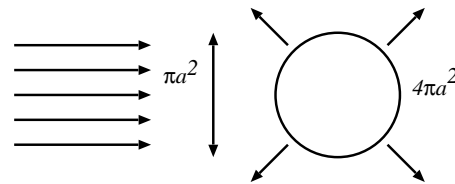


図 2.4: 太陽光と地球の幾何学。

地球の場合、大気がないと、

$$T_e = \left[ \frac{S(1 - A)}{4\sigma} \right]^{1/4} = 2.55 \times 10^2 [\text{K}] \quad (2.6)$$

大気の温室効果  $T \simeq 288[\text{K}]$

温室効果の簡単なモデル

・放射平衡

$$S(1 - A)\pi a^2 = 4\pi a^2 I_E \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow I_E = \frac{S}{4}(1 - A) = 240 [\text{W/m}^2] \quad (2.8)$$

( 入射光の単位時間・単位面積当たりに入ってくるエネルギーは  $I_E$  )

大気の熱収支 (入射=放射) :

$$I_E + \sigma T_g^4 = 0.9I_E + 2\sigma T_a^4 \quad (2.9)$$

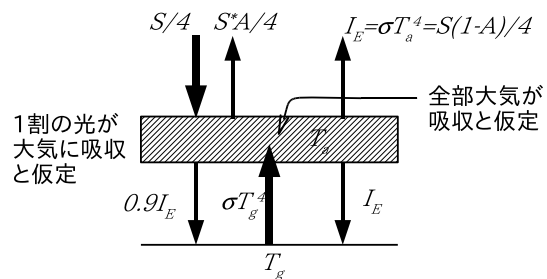


図 2.5: 温室効果。

地面の熱収支：

$$0.9I_E + \sigma T_a^4 = \sigma T_g^4 \quad (2.10)$$

これらを連立させて解くと、

$$I_E = \sigma T_a^4 \rightarrow T_a = 255[\text{K}] \quad (2.11)$$

$$\sigma T_g^4 = 1.9I_E \quad (2.12)$$

ここから地表の温度は

$$T_g = 1.9^{1/4} T_a = 299[\text{K}] \quad (2.13)$$

となる。実際には、

- 何層もある
- 上層大気が完全に吸収しない

ことを考慮する必要がある。

## 2.4 エネルギー収支

図 2.2 参照。

## 2.5 大気の鉛直構造

図 2.6: 『基礎気象学』図 1.2 より

(温室効果 対流圏)  
(オゾン層 成層圏の形成)

図 2.7: 『一般気象学』図 2.1 より

## 第3章 大気の熱力学

### 3.1 理想気体の状態方程式

圧力 ( $p$ )、温度 ( $T$ )、密度 ( $\rho$ ) の関係

$$pV = mRT \quad \dots \quad \text{Equation of State (EOS)} \quad (3.1)$$

$V$ : 気体の体積

$m$ : 気体の質量

$R$ : 気体定数 (気体の種類ごとに特有)

$\rho = m/V$  より、

$$p = \rho RT \quad (3.2)$$

比容  $\alpha \equiv 1/\rho$  (単位質量当たりの体積; 気体 1kg が占める体積 [ $\text{m}^3$ ]) を用いると、

$$p\alpha = RT \quad (3.3)$$

気体の量...キロモル (kmol) 分子数

$$n = \frac{m}{M} \quad [\text{kmol}] \quad \begin{array}{l} m : \text{質量} [\text{kg}] \\ M : \text{分子量} [\text{g/mol}] = [\text{kg/kmol}] \end{array} \quad (3.4)$$

1[kmol] 当たりの分子数...アボガドロ数  $N_A = 6.022 \times 10^{26}$

(通常は 1[mol] 当たりの分子数、 $6.022 \times 10^{23}$  をアボガドロ数とするが、気象学では 1[kmol] 当たりで定義する)

$$\rightarrow pV = mRT = \frac{m}{M}MRT = nR^*T, \quad R^* = MR \quad (3.5)$$

$R^*$ : 一般 (普遍) 気体定数 =  $8314.3[\text{J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}]$ ... 気体に依らない

アボガドロの仮説「同じ数の分子を含む気体は同じ温度・同じ圧力のもとでは同じ体積を占める」

$$V = \frac{nR^*T}{p} \quad (3.6)$$

・乾燥空気の状態方程式

└─→ 混合気体

Dalton の法則... 混合気体の圧力  $p$  は、分圧  $p_i$  の和に等しい

$$p = \sum_i p_i \quad \dots \text{力の和に相当} \quad (3.7)$$

本来圧力は粒子が壁に与える運動量変化に起因するため、粒子数に比例する。

$i$  番目の気体の状態方程式

$$p_i V = m_i T \frac{R^*}{M_i} \quad (3.8)$$

$$\odot p = \sum_i p_i = \sum_i \left[ \frac{m_i T R^*}{V M_i} \right] = \frac{TR^*}{V} \sum_i \frac{m_i}{M_i} \quad (3.9)$$

ここで、全質量は  $\sum_i m_i \rightarrow \alpha = V / \sum_i m_i$

$$\begin{aligned} \rightarrow p\alpha &= \left[ \frac{TR^*}{V} \sum_i \frac{m_i}{M_i} \right] \frac{V}{\sum_i m_i} \\ &= R^* T \frac{\sum_i m_i / M_i}{\sum_i m_i} \\ &\equiv \frac{R^* T}{\bar{M}} \quad \bar{M} = \frac{\sum_i m_i}{\sum_i m_i / M_i} : \text{平均分子量} \\ &\equiv \bar{R} T \quad \bar{R} : \text{混合気体の気体定数、} \bar{R} = \frac{R^*}{\bar{M}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

乾燥空気の  $\bar{M} = M_d$

$$M_d = \frac{1}{\frac{0.755}{28} + \frac{0.231}{32} + \frac{0.013}{40}} = 28.96 \quad (3.11)$$

└─→  $\text{N}_2$  └─→  $\text{O}_2$  └─→  $\text{Ar}$

$$R_d = \frac{R^*}{M_d} = \frac{8314.3 \text{ J}/(\text{K kmol})}{28.96 \text{ kg/kmol}} = 287 [\text{J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}] (= [\text{m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}]) \quad (3.12)$$

## 宿題

(問題 1,2 は「一般気象学」より。答が載っていますが、どうしてその答になったかわかるようにまとめてください)

1. 金星の待機では容積比で  $\text{CO}_2$  が 95%,  $\text{N}_2$  が 5% を占めているとして、金星大気 の平均分子量および 1[kg] の (単位質量当たりの) 金星大気 の気体定数を求めよ。ただし、C, O, N の原子量はそれぞれ 12, 16, 14 とする。

(答) 平均分子量 : 43.2、気体定数 :  $192.5[\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}]$

2. 容積  $0.01[\text{m}^3]$  まで耐えられる気球に質量  $0.01[\text{kg}]$  の乾燥空気をつめて、高度  $5[\text{km}]$  で放球したら気球は破裂するか。この高度の気圧は  $540[\text{hPa}]$ 、気温は  $-17[ ]$  とする。

(答) このような問題で最も注意すべきことは、式のなかの物理量の単位を正しくそろえることである。 $540[\text{hPa}]$  は  $540 \times 10^2[\text{Pa}]$  であり、 $-17[ ]$  は  $256[\text{K}]$  である。状態方程式より高度  $5[\text{km}]$  における気球の容積  $V$  は

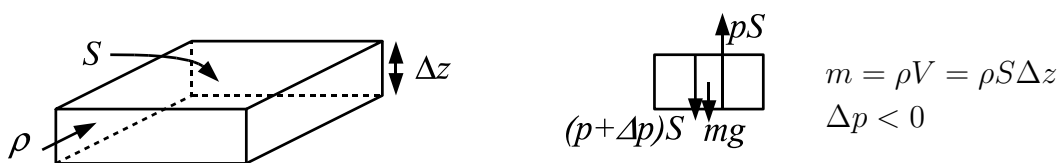
$$V = \frac{mR_dT}{p} = \frac{0.01 \times 287 \times 256}{5.4 \times 10^4} = 0.0136[\text{m}^3] \quad (3.13)$$

したがって気球は破裂する。

3. 1 気圧 ( $1013[\text{hPa}]$ ) 下でこの気球に空気をつめていく。気球が破裂するときの空気の質量を求めよ。温度は  $15[ ]$  とする。

## 3.2 静水圧 (静力学) 平衡

静止した大気 (圧力と重力が釣り合っている) を考える。



釣り合いで考えると

$$pS = (p + \Delta p)S + \rho S \Delta z g \quad (3.14)$$

$$\rightarrow \Delta p = -\rho g \Delta z \quad (3.15)$$

運動方程式で考えると

$$\begin{aligned} ma &= pS - [(p + \Delta p)S + mg] && \text{上向きを正} \\ &= S[-\Delta p - \rho g \Delta z] \\ &= 0 && \text{静止している 加速度ゼロ} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta z} = -\rho g \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \boxed{\text{静水圧平衡}} \quad (3.17)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{ma}{S} = \frac{-\Delta p - \rho g \Delta z}{\Delta z} \\ \quad \quad \quad \downarrow \text{正} \\ \rho \text{を小さいものに置きかえると、} \\ \text{上向き加速度が発生 浮力} \end{array} \right.$$

・ 気圧の高度変化

EOS:  $p = \rho R_d T$  を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\frac{pg}{R_d T} \\ \rightarrow \frac{dp}{p} &= -\frac{g}{R_d T} dz \\ \rightarrow \ln \frac{p_1}{p_0} &= -\frac{g}{R_d} \int_0^{z_1} \frac{dz}{T} \quad \begin{array}{l} p = p_1, T = T_1 @ z = z_1 \\ p = p_0, T = T_0 @ z = 0 \text{ (地表)} \end{array} \end{aligned} \quad (3.18)$$

通常の大気では、

$$T(z) = T_0 - \Gamma z, \quad \Gamma = 0.65 [\text{K}/100\text{m}] \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \odot \ln \frac{p_1}{p_0} &= -\frac{g}{R_d} \int_0^{z_1} \frac{dz}{T_0 - \Gamma z} \\ &= +\frac{g}{R_d \Gamma} \int_0^{z_1} \frac{dz}{z - T_0/\Gamma} \\ &= \frac{g}{R_d \Gamma} \ln \left[ \frac{z_1 - \frac{T_0}{\Gamma}}{-\frac{T_0}{\Gamma}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g}{R_d \Gamma} \ln \frac{T_0 - \Gamma z_1}{T_0} \\
&= \ln \left( \frac{T_0 - \Gamma z_1}{T_0} \right)^{g/R_d \Gamma} \\
\rightarrow p_1 &= p_0 \left( \frac{T_0 - \Gamma z_1}{T_0} \right)^{g/R_d \Gamma} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

天気図の気圧

各地の測候所の高度は同じではない

高地では気圧が低い

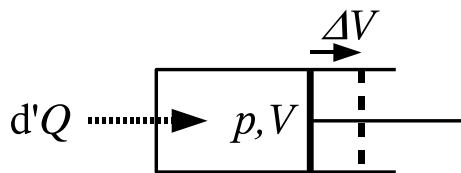
そのため、上式を使い、海面上の気圧に補正し、等圧線を引く

海面更正

### 3.3 熱力学第一法則

熱エネルギーまで含めたエネルギー保存則

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動エネルギー} \quad \text{cf. } \frac{1}{2}mv^2 \\ \text{位置エネルギー} \quad \text{cf. } mgh \\ \text{熱エネルギー} \end{array} \right.$$



$$d'Q = dU + d'W \quad \leftrightarrow \quad \text{エネルギー保存} \tag{3.21}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d'Q: \text{ 加えた熱量} \\ dU: \text{ 内部エネルギー} \\ d'W: \text{ 仕事} \end{array} \right.$$

$$d'W = Fdx = pSdx = pdV \tag{3.22}$$

$$\odot d'Q = dU + pdV \tag{3.23}$$

単位質量あたりにすると ( $V \rightarrow \alpha$ )

$$d'Q = du + pd\alpha \quad (u: \text{単位質量あたり内部エネルギー}) \tag{3.24}$$

- 等積変化 ( $d\alpha = 0$ )

$$C_V dT = d'Q = du \quad (3.25)$$

$$\rightarrow du = C_V dT \quad (3.26)$$

$C_V$ : 定積 (定容) 比熱 =  $717[\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}]$   
一定の体積で、 $1[\text{K}]$  上げるのに必要な熱量

- 等圧変化 ( $dp=0$ )

$$\begin{aligned} C_p dT &= d'Q = du + p d\alpha & C_p: \text{定圧比熱} &= 1004[\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}] \\ &= C_V dT + p d\alpha & & \end{aligned} \quad (3.27)$$

- 一般

$$\begin{aligned} d'Q &= C_V dT + p d\alpha \\ &= C_V dT + d(p\alpha) - \alpha dp \\ &= C_V dT + R dT - \alpha dp \\ &= (C_V + R) dT - \alpha dp \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\odot dp = 0 \text{ のとき、} d'Q = C_p dT$$

$$\odot C_p = C_V + R \quad (3.29)$$

- エンタルピー (顕熱)

$$u + p\alpha \quad (3.30)$$

$$u = C_V T, \quad p\alpha = RT \quad (3.31)$$

$$\rightarrow u + p\alpha = C_V T + RT = C_p T \quad (3.32)$$

### 3.4 断熱変化

$$\begin{cases} d'Q = C_p dT - \alpha dp \\ dp = -\rho g dz \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d'Q &= C_p dT + \rho g \alpha dz \\ &= C_p dT + g dz & \odot \alpha &= \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (3.34)$$



$d'Q = 0$  で変化するとき (断熱)、

$$C_p dT + g dz = 0 \quad (3.35)$$

$$\rightarrow -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_p} \equiv \Gamma_d \quad \text{乾燥断熱減率、} 0.00976 [\text{K m}^{-1}] \quad (3.36)$$

1km 上昇すると、約 10K 下がる

$$d(C_p T + gz) = 0 \quad (3.37)$$

$h_d \equiv C_p T + gz$  が保存

↳ 乾燥静的エネルギー (エンタルピー+位置エネルギー)

次に、

$$\begin{aligned} C_p dT &= \alpha dp \\ &= \frac{RT}{p} dp \quad (\because p\alpha = RT) \\ \rightarrow \frac{dT}{T} &= \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} \\ \rightarrow \ln \frac{T}{T_0} &= \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \\ \rightarrow T &= T_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \\ \rightarrow T_0 &= T \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-R/C_p} \equiv \theta \end{aligned} \quad (3.38)$$

$\theta$ : 温位、標準気圧 (通常  $p_0 = 1000\text{hPa}$ ) まで移動させた時の温度

$p < p_0$ ,  $R/C_p > 0$  なので、 $T_0 > T$  (地表付近まで降ると温度が上昇する)

上式より、 $T \propto p^{R/C_p}$ 、一方、状態方程式より  $T \propto p/\rho$ 。従って、

$$\rho \propto p^{1-R/C_p} \propto p^{C_V/C_p} \quad (3.39)$$

$$\rightarrow p \propto \rho^\gamma, \quad \gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} : \text{断熱指数} \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} \text{二原子分子} & \gamma = 7/5 \\ \text{単原子分子} & \gamma = 5/3 \end{cases}$$

### 3.5 相変化

湿った空気の理解 (天気と密接に関係)

相変化 (相転移)...質的な違い

e.g. 氷 水の場合

熱を加えても分子間の結合を切るのに使われ温度が上昇しない

融解熱  $3.34 \times 10^5$  [J/kg] 氷 水

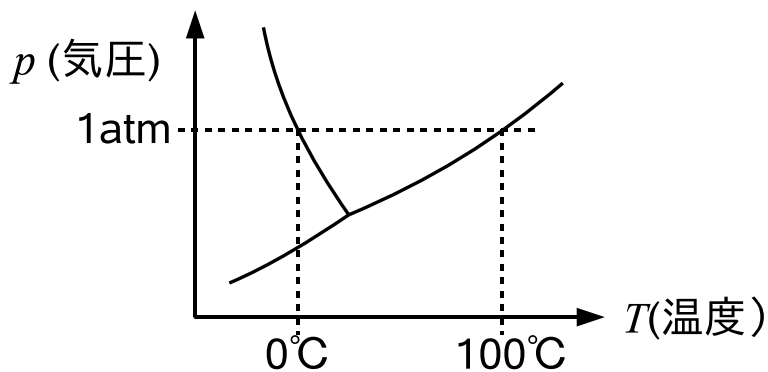
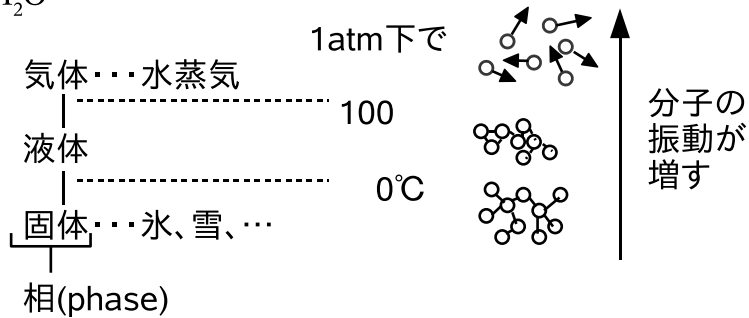
蒸発熱  $2.50 \times 10^6$  [J/kg] 水 水蒸気

昇華  $2.83 \times 10^6$  [J/kg] 氷 水蒸気

逆向きの相変化では、同量の凝結熱を放出

潜熱

H<sub>2</sub>O



#### ・蒸発

1. 水面から蒸発する分子の量

エネルギーの高い分子が結合を断ち切り飛び出す ( 潜熱)  
温度で決まる

2. 空気中から水面に捕捉される水蒸気の分子  
水面近くの分子数と分子の運動速度に依る  
水蒸気量と温度で決まる

1の方が2より多いと水は蒸発していく

・飽和

1と2が釣り合う(平衡) 「飽和」

このときの水蒸気圧(水蒸気分圧) 飽和水蒸気圧

↳ 温度のみの関数

Tetens(テイテン)の式

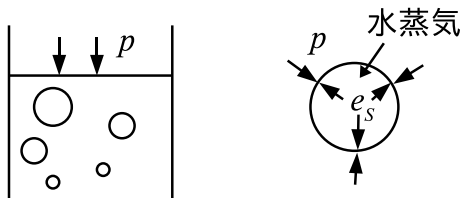
$$e_s(t) = 6.11 \times 10^{\frac{at}{b+t}} [\text{hPa}] \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} e_s : \text{飽和水蒸気圧} \\ t : \text{温度} [ \ ] \\ a = 7.5, b = 237.3 \end{cases}$$

実験値によく合う近似式

・沸騰

飽和水蒸気圧がまわりの気圧と同じになる温度で沸騰



### 3.6 大気中の水分

(1) 相対湿度  $R$

$$R = \frac{e}{e_s(t)} \times 100[\%] \tag{3.42}$$

その温度での飽和水蒸気圧 ( $e_s(t)$ ) に対する水蒸気圧 ( $e$ ) の比

同じ水蒸気量でも、気温が変化すれば、湿度も変化する

(2) 混合比

$$\begin{cases} \rho_v : \text{水蒸気密度} \\ \rho_d : \text{乾燥空気の密度} \end{cases}$$

混合比  $w = \rho_V / \rho_d$

$$\begin{cases} e : \text{水蒸気圧 (分圧)} \\ p : \text{湿った空気の圧力 (乾燥空気と水蒸気の混合気体)} \\ p - e : \text{乾燥空気の分圧} \end{cases}$$

$$e = R_V \rho_V T \quad R_V : \text{水蒸気に対する気体定数} \quad (3.43)$$

$$R_V = \frac{R^*}{M_V} = 461 [\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}], M_V = 18.016$$

$$p - e = R_d \rho_d T \quad R_d : \text{乾燥空気に対する気体定数} \quad (3.44)$$

$$R_d = \frac{R^*}{M_d}, \quad \varepsilon \equiv \frac{R_d}{R_V} = \frac{M_V}{M_d} = 0.622$$

混合比は、

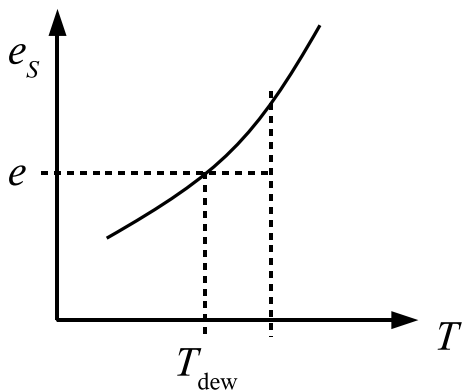
$$w = \frac{\rho_V}{\rho_d} = \frac{e}{R_V T} \frac{R_d T}{p - e} = \frac{e}{p - e} \varepsilon \simeq \varepsilon \frac{e}{p} \quad (\because \text{通常 } \frac{e}{p} < 0.04 \ll 1) \quad (3.45)$$

飽和空気に対しては、

$$w_S = \varepsilon \frac{e_S}{p} \quad (3.46)$$

### (3) 露点温度

気温が下がると飽和する温度 ( $T_{\text{dew}}$ ) 結露



### (4) 湿球温度

温度計の球部を湿ったガーゼで覆った時の温度

蒸発により  $T \rightarrow T_w$  に温度低下

この時、乾燥空気の単位体積当たりのエネルギー変化は

$$\rho_d C_p (T - T_w) \quad (\odot) \text{等圧変化} \quad (3.47)$$

一方、蒸発により、単位質量当たり奪う熱量

$$L = 2.50 \times 10^6 [\text{J/kg}] \quad (3.48)$$

より、単位体積当たり奪う熱量は

$$(\rho_{V,S} - \rho_V) L \quad \rho_{V,S} : \text{飽和水蒸気密度} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} (\odot) (\rho_{V,S} - \rho_V) L &= \rho_d C_p (T - T_w) \\ \rightarrow (w_S - w) &= \frac{C_p}{L} (T - T_w) \\ \rightarrow e_S - e &= \frac{p C_p}{\varepsilon L} (T - T_w) \\ \rightarrow e &= e_S(T) - \frac{p C_p}{\varepsilon L} (T - T_w) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$T, T_w$  より  $e$ 、即ち湿度が求まる

### 3.7 湿潤断熱減率

湿った空気塊を断熱的に上昇させる

断熱膨張で温度下がる

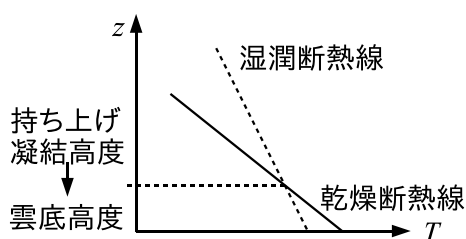
余分な水蒸気は凝結又は昇華

潜熱を放出

空気塊を暖める

不飽和空気塊よりも温度低下しにくい

飽和した空気 湿潤断熱減率



---

 湿潤断熱減率の導出

$(T, p)$  での飽和混合比は

$$w_S = \varepsilon \frac{e_S}{p} \quad (3.51)$$

次に  $(T + dT, p + dp)$  での飽和混合比を、 $(T, p)$  での飽和混合比  $w_S$  とそこからのズレ  $dw_S$  の和で表すと、温度が  $T + dT$  の時の飽和水蒸気圧を  $e_S + de_S$  とし、 $e_S$  は温度  $T$  の時の飽和水蒸気圧、

$$\begin{aligned} w_S + dw_S &= \varepsilon \frac{e_S + de_S}{p + dp} \\ &= \varepsilon \frac{e_S}{p} \frac{1 + \frac{de_S}{e_S}}{1 + \frac{dp}{p}} \\ &\simeq w_S \left(1 + \frac{de_S}{e_S}\right) \left(1 - \frac{dp}{p}\right) \\ &\simeq w_S \left(1 + \frac{de_S}{e_S} - \frac{dp}{p}\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

となる。ここで、 $(1 + x)^{-1} \simeq (1 - x)$  (ただし  $x \ll 1$ ) の Taylor 展開を用い、2次以降の微小量は無視した。

これより、

$$dw_S = w_S \left( \frac{de_S}{e_S} - \frac{dp}{p} \right) \quad (3.53)$$

となるが、 $e_S$  は  $T$  だけの関数であるから、それを明示的に表して

$$dw_S = w_S \left( \frac{1}{e_S} \frac{de_S}{dT} dT - \frac{dp}{p} \right) \quad (3.54)$$

と書いておく。

さて、凝結によって解放される潜熱  $d'Q$  を求めると、単位質量当たりの潜熱を  $L$  とすれば、単位質量の空気塊あたりに解放される潜熱は

$$d'Q = -Ldw_S \quad (3.55)$$

となる。ここで、上昇しながら冷える空気を考えれば、凝結によって水蒸気が析出するため混合比は減少していくので、 $dw_S$  は負である。 $w_S$  が減少する時に正の潜熱を解放するので負の符号がつく。

一方、この潜熱がすべて乾燥空気の温度上昇に使われると近似すると(即ち、水滴や水蒸気は微量なので、それらを暖めるのに使われるエネルギーは無視する)、熱力学第一法則より、

$$d'Q = C_p dT - \alpha dp \quad (3.56)$$

これらを等しいとおくと、

$$d'Q = -Ldw_S = -Lw_S \left( \frac{1}{e_S} \frac{de_S}{dT} dT - \frac{dp}{p} \right) = C_p dT - \alpha dp \quad (3.57)$$

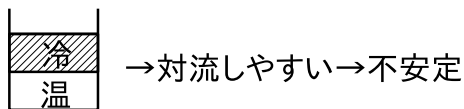
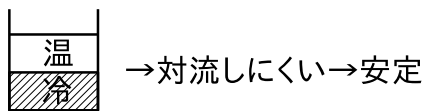
これを、静水圧平衡の式  $dp = -\rho_d g dz$  を用いて整理すると、

$$\Gamma_m = -\frac{dT}{dz} = \Gamma_d \frac{1 + \frac{Lw_S}{R_d T}}{1 + \frac{\varepsilon L}{C_p} \frac{de_S}{dT}} \quad (3.58)$$

となる。ここで乾燥断熱減率  $\Gamma_d = g/C_p$  を使った。

### 3.8 (静的) 安定性

・安定性とは？



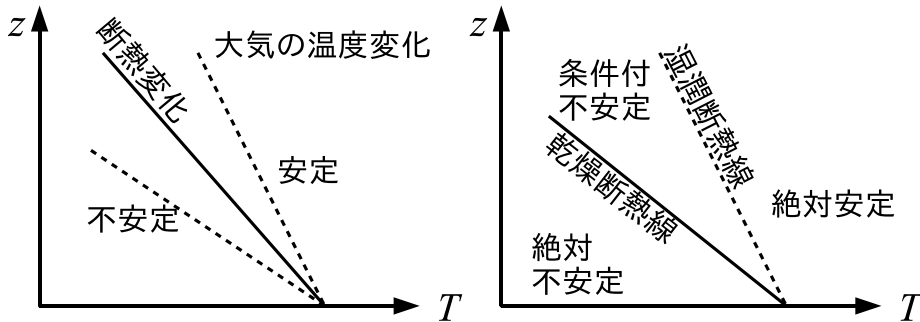
・乾燥空気の場合

空気塊は周囲の大気と圧力平衡にある ( $p_{\text{air}} = p_d$ )

$$\begin{aligned} \rho_{\text{air}} T_{\text{air}} &= \rho_d T_d \\ \rightarrow \frac{\rho_d}{\rho_{\text{air}}} &= \frac{T_{\text{air}}}{T_d} \quad \left\{ \begin{array}{l} < 1 \dots \text{上向き} \text{の力} \\ > 1 \dots \text{下向き} \text{の力} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.59)$$

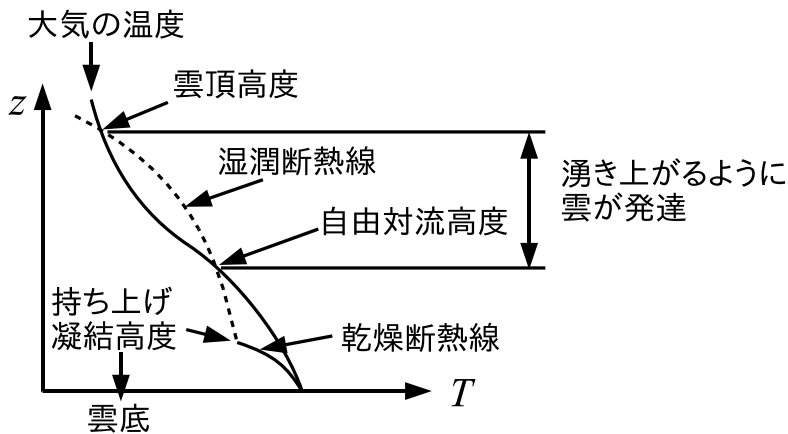
・湿潤空気の場合

絶対安定、絶対不安定の中に「条件付不安定」がある



条件...不飽和なら (乾燥断熱減率なので) 安定、飽和なら (湿潤断熱減率なので) 不安定

「自由対流高度」まで湿潤空気が (上昇気流で) 持ち上げられると不安定になり湧き上がるように雲が発達する (湿潤空気が周囲の空気よりも暖かい)。やがて上空で周囲の空気と温度が一致するようになり、安定になる (上昇がストップする)。ここが雲頂に相当する。





## 第4章 雲と降水の物理

過飽和になると、水蒸気は水滴になろうとする

$$\text{過飽和度} = \frac{e - e_s}{e_s} \times 100[\%] \quad (4.1)$$

しかし、水滴は球形であり、平面の水面とな状況が異なる。

半径  $r$

表面積  $A \propto r^2$

体積  $V \propto r^3$

単位分子数当たりの表面積  $A/V \propto 1/r$

小さい水滴ほど蒸発しやすい(平面との違い)

$r = 0.01[\mu\text{m}] \dots 12\%$ 過飽和で平衡

$r = 0.1[\mu\text{m}] \dots$  約 1%過飽和で平衡

しかしそのような ( $0.1\mu\text{m}$  程度の) 大きな水滴はつくるのが困難  
どうやって雨粒は成長するのか？

### 4.1 エーロゾルと凝結核

大気中の雲粒・氷粒...大気中に浮遊する微粒子を核として生成

雲粒...  $1-100[\mu\text{m}]$

雨粒...  $\sim 1[\text{mm}]$

エーロゾル... $0.005 \sim 1[\mu\text{m}]$  以上

土壌粒子、海塩粒子、火山噴火起源の粒子、大気汚染粒子、etc.

硫酸アンモニウム、硫酸、硝酸ナトリウムなどの微粒子

水に溶解しやすいエーロゾル...飽和水蒸気圧が下がる( 沸点上昇)ので、蒸発しにくい

## 4.2 雲粒の成長

空気塊が上昇 常に過飽和

水滴の質量  $m$  の増加率 半径  $r$  × 過飽和度

水蒸気が拡散により水滴表面まで到達し、水滴に吸収されると考えよう。水蒸気の拡散量(水蒸気フラックス)は  $-Dd\rho_V(r)/dr$  と表される。ここで  $D$  は拡散係数であり、おおよそ  $2.4 \times 10^{-5} [\text{m}^2/\text{s}]$  である。これを用いると、質量の増大率は飽和水蒸気密度を引数なしの  $\rho_V$  と書いて、

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 D \frac{d\rho_V(r)}{dr} = 4\pi r D \rho_V \frac{e - e_S}{e_S} \quad (4.2)$$

と書ける。ここで水(液体)の密度を  $\rho_W$  とすると  $m = 4\pi r^3 \rho_W / 3$  より、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{D \rho_V}{r \rho_W} \frac{e - e_S}{e_S} \quad (4.3)$$

サイズが大きくなると成長しにくい  
雨粒まで成長できない

## 4.3 雨粒の成長

雨:

- 暖かい雲中で少数の雲粒だけが急速に成長し雨粒になる  
暖かい雨(熱帯、夕立)
- 氷粒がとけて雨になる  
冷たい雨(中・高緯度地方)、日本の雨の約8割

・落下速度

落下する水滴にはたらく抵抗  $= 6\pi\eta r v$

$\eta$ : 粘性係数  $= 1.8 \times 10^{-5} [\text{N s m}^{-2}]$

運動方程式は(下向きを正とする)、

$$ma = -6\pi\eta r v + mg \quad (4.4)$$

$v$  が増加すると  $a \rightarrow 0$ 、このとき

$$6\pi\eta r v = mg \quad (4.5)$$

$$\rightarrow v = \frac{mg}{6\pi\eta r} \quad \text{終端速度} \quad (4.6)$$

$m = 4\pi r^3 \rho_w / 3$  より、

$$\rightarrow v = \frac{2\rho_w r^2 g}{9\eta} \quad (4.7)$$

大きい雨粒ほど速く落下する  
 他の雨粒とどんどん合体する  
 大きい雨粒は、小さい雨粒よりも急速に成長する

## 4.4 氷粒の成長

純粋な過冷却水滴...-33 ~ -41 で自発的に凍結

上層雲 (巻積雲など)

通常は微粒子 (氷晶核) によって氷晶が生成

粘土鉱物 (カオリナイト、黄砂)、火山灰、ヨウ化銀 (人工氷晶核) など

(凝結核の数  $\gg$  氷晶核の数) 氷晶になれず、過冷却の水滴からなる雲が多い。低温では有効となる氷晶核が増える。

航空機の着氷事故の原因

成長過程

### 1. 水蒸気の昇華凝結 雪

水蒸気が氷晶に直接くっつく

過冷却水の飽和水蒸気よりも、

氷面の飽和水蒸気圧は低い

氷粒子の成長は速い

大きい粒になりやすい

氷晶の形：湿度と過飽和度に依る

中谷ダイヤグラム

図 4.1: 中谷ダイヤグラム。『雪』  
 (中谷宇吉郎、岩波文庫) より。

### 2. 過冷却雲粒の捕捉 あられ、ひょう

氷粒に雲粒が凍結し成長

落下速度増大、ますます大きくなる あられ

発達した入道雲など 内部に強い上昇気流

あられがなかなか落ちない

図 4.2: 様々な雲。『基礎気象学』図 4.6 より。

さらに発達 ひょう  
急速に成長すると、氷粒の間に水の部分が残る

### 3. 凝集

氷粒同士の衝突合体 ぼたん雪

氷粒子の融解

空気中の温度が高いと、あられや雪は、とけて雨になる  
粒子が周囲の空気から熱伝導で得る熱

表面から水が昇華蒸発する際に奪われる潜熱  
これらの大小関係で決まる

## 4.5 雲

表に雲の分類を示す。外見によった分類であるが、成因や構造とも深く関係している。

鉛直方向に発達する積雲系の雲は、対流雲 (convective cloud) とも呼ばれ、湿った暖い空気が不安定性により上昇する時に発達する。

		和名	国際名	記号	よく現れる高さ
層状雲	上層雲	巻雲 (絹雲)	cirrus	Ci	極地方 3~8 km
		巻積雲 (絹積雲)	cirrocumulus	Cc	温帯地方 5~13 km
		巻層雲 (絹層雲)	cirrostratus	Cs	熱帯地方 6~18 km
	中層雲	高層雲	altostratus	As	極地方 2~4 km
		高積雲	altocumulus	Ac	温帯地方 2~7 km
		乱層雲	nimbostratus	Ns	熱帯地方 2~8 km
下層雲	層積雲	stratocumulus	Sc	地面付近 ~2 km	
	層雲	stratus	St		
対流雲		積雲	cumulus	Cu	雲底は通常下層にあるが、雲頂は中・上層にまで達していることが多い
		積乱雲	cumulonimbus		

表 4.1: 雲の種類：高さと形による分類 (10 種雲形)。『基礎気象学』表 4.4 より。

## 第5章 大気の運動

### 5.1 極座標での運動方程式

ニュートンの運動方程式は、

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

ここで

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (5.2)$$

なお、運動量で書けば、

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \implies m\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.3)$$

大規模な運動の場合： 対流圏の厚み ~ 10km 程度

100km 程度を越えるスケールでの運動では、高さ方向は無視してよい  
(事実上、2次元面上の運動)

地球は自転している 加速度系

半径  $r$ 、速度  $v$ 、角速度  $\omega$

$$v = r\omega \leftrightarrow \ell = r\theta$$

$$\text{動径方向の運動方程式} \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$$

$$\text{接線方向の運動方程式} \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta$$

ここでドット ( ) は時間微分  $d/dt$  を表す

$$\omega = \dot{\theta}$$

#### 宿題

動径方向、接線方向の運動方程式が上の形になることを証明せよ。

動径方向の運動方程式を変形すると、

$$m\ddot{r} = F_r + mr\omega^2 \quad (5.4)$$

つまり、見かけの力 ( $mr\omega^2 = mv^2/r$ ) が生じる 遠心力

## 5.2 コリオリ力(転向力)

もう一つの見かけの力

自転角速度

$$\Omega = \frac{2\pi}{1\text{day}} = 7.282 \times 10^{-5} [\text{s}^{-1}] \quad (5.5)$$

緯度  $\phi$  でのある地点 P での回転速度は

$$R(\cos \phi)\Omega \quad (5.6)$$

- コリオリ力の南北成分 (東西に運動する空気塊)

緯度  $\phi$  で風速 (地面に対する速度)  $u$  で東に動く空気塊の速度...  $R\Omega \cos \phi + u$

自転軸方向の遠心力は

$$F = \frac{(R\Omega \cos \phi + u)^2}{R \cos \phi} = \Omega^2 R \cos \phi + 2\Omega u + \frac{u^2}{R \cos \phi} \quad (5.7)$$

第1項 P で静止している人に対する遠心力

第2項 P で静止している人にとっての見かけの力... コリオリ力

第3項 P で静止している人が期待する、空気塊に対する遠心力

コリオリ力  $2\Omega u$  は自転軸に垂直な力であるが、運動は地球表面に限られるので、表面に接する成分は

$$2\Omega u \sin \phi \quad (5.8)$$

となる。

- コリオリ力の東西成分 (南北に運動する空気塊)

角運動量の保存則 (一般に)

$$L = mrv \quad (\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (5.9)$$

時刻  $t$  に緯度  $\phi$  におり、東西方向に  $u$ 、南北方向に  $v$  で動くとする

$\Delta t$  後に  $\phi + \Delta\phi$ ,  $u + \Delta u$ , ちなみに  $v = R\Delta\phi/\Delta t$

角運動量保存則より、

$$R \cos \phi (\Omega R \cos \phi + u) = R \cos(\phi + \Delta\phi) [\Omega R \cos(\phi + \Delta\phi) + u + \Delta u] \quad (5.10)$$

Taylor 展開で  $\Delta\phi$ ,  $\Delta u$  の 1 次までとると

$$\cos(\phi + \Delta\phi) \simeq \cos \phi + \Delta\phi (\cos \phi)' = \cos \phi - \Delta\phi \sin \phi \quad (5.11)$$

と展開できるので、これを用いて

$$R \cos \phi (\Omega R \cos \phi + u) = [R \cos \phi - R \Delta\phi \sin \phi] [\Omega R \cos \phi - \Omega R \Delta\phi \sin \phi + u + \Delta u] \quad (5.12)$$

両辺共通するものを引いて、残りは

$$R \cos \phi [-\Omega R \Delta\phi \sin \phi + \Delta u] - R \Delta\phi \sin \phi [\Omega R \cos \phi + u] = 0 \quad (5.13)$$

まとめると

$$-2\Omega R \Delta\phi \sin \phi \cos \phi + \Delta u \cos \phi - u \Delta\phi \sin \phi = 0 \quad (5.14)$$

ここで  $v = R\Delta\phi/\Delta t$  より

$$-2\Omega v \sin \phi \cos \phi + \frac{\Delta u}{\Delta t} \cos \phi - \frac{uv}{R} \sin \phi = 0 \quad (5.15)$$

従って、

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = 2\Omega v \sin \phi + \frac{uv \sin \phi}{R \cos \phi} \quad (5.16)$$

通常、第 2 項は小さく無視してよいので、

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = 2\Omega v \sin \phi \quad (5.17)$$

となる。これは、東西方向に働く単位質量あたりの力である。

コリオリ力は運動に常に垂直... 「仕事」をしない  
速さを変えない

### 5.3 地衡風

風は等圧線にほぼ平行に吹く  
 圧力勾配 (気圧傾度力) とコリオリ力のため  
 地球が静止している場合

$$\rho a = -\frac{dp}{dx} \quad (\text{静水圧平衡の式を思い出すこと、ただし } g = 0) \quad (5.18)$$

コリオリ力が加わると単位質量あたりの運動方程式は

$$a \left( = \frac{F}{m} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - 2\Omega V \sin \phi \quad (5.19)$$

$a = 0$  となって釣り合うように  $V$  が変化するので、

$$V = \frac{1}{2\rho\Omega \sin \phi} \frac{dp}{dx} \quad (5.20)$$

- ・ 空気塊がカーブを描いて運動する場合 (台風や低気圧まわりなど)  
 局所的な遠心力を考慮する必要あり

図 5.1: 地衡風。『一般気象学』図 6.10 より。

### 5.4 温度風

地衡風に温度の高度変化を考慮する  
 対流圏内では、等圧面上で (同じ圧力のところで)  
 赤道側で高温 (低密度)、極側で低温 (高密度)  
 極側では、等圧面の高度が下がっている  
 上空ほど気圧傾度が大きい  
 上空ほど地衡風速が大きい  
 ジェット気流

図 5.2: 温度風。『一般気象学』図 6.14 より。

### 5.5 地表面摩擦

大気の粘性のため、地面との摩擦で地表付近の風速は弱い  
 摩擦力が大きいほど、風は等圧線を大きな角度で横切る



(熱帯) 低気圧の場合

低気圧中心に向かって吹き込む

空気が集まるので、上空に押し上げる

し上げる

上昇気流の発達

台風の発達

図 5.3: 低気圧・高気圧の大気の流れ。『一般気象学』図 6.19 より。

図 5.4: 地表面摩擦。『一般気象学』図 6.16 より。

## 5.6 温帯低気圧の発生・成長、前線と天気の変化

・ 温帯低気圧の発生の仕組み

高緯度地方の冷たい空気が低緯度地方の暖かい空気の下に潜り込み、上昇気流を発生させ、寒冷前線を形成する。また、暖かい空気は冷たい空気の上空に覆い被さるようにゆるやかに上昇して上昇気流を作り、温暖前線を形成する。

寒冷前線の方が速度が速いため、やがて寒冷前線は温暖前線に追いつき、閉塞前線を形成する。

図 5.5: 温帯低気圧の発達の模式図。『一般気象学』図 7.14 より。

閉塞前線が形成されるとき、冷たい空気が地表付近を覆いつくす。

図 5.6: 閉塞前線形成時の大気の様子。『新しい高校地学の教科書』図 6-26 より。

寒冷前線では寒気が急速に下降し暖気を押し上げるため、雲の発達が速い。一方、温暖前線では暖気が寒気の上をゆっくりと昇っていくため、広範囲にしとしとした雨を降らせる。

図 5.7: 前線付近の雲の様子。『一般気象学』図 4.14、『新しい高校地学の教科書』図 6-25 より。

## 付録A 微分と積分

### 微分の復習

#### 一般論

微分：関数  $f(x)$  の導関数

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.1})$$

$\Delta x \rightarrow 0$ :  $x$  での接線の傾き。つまり、 $(x_0, y_0 = f(x_0))$  を通り、 $f(x)$  に接する直線は、

$$y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + y_0 \quad (\text{A.2})$$

と書ける。以後、簡単のため、

$$\frac{df}{dx} = f', \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) \quad (\text{A.3})$$

と書く。

意味： $\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$  とおくと、

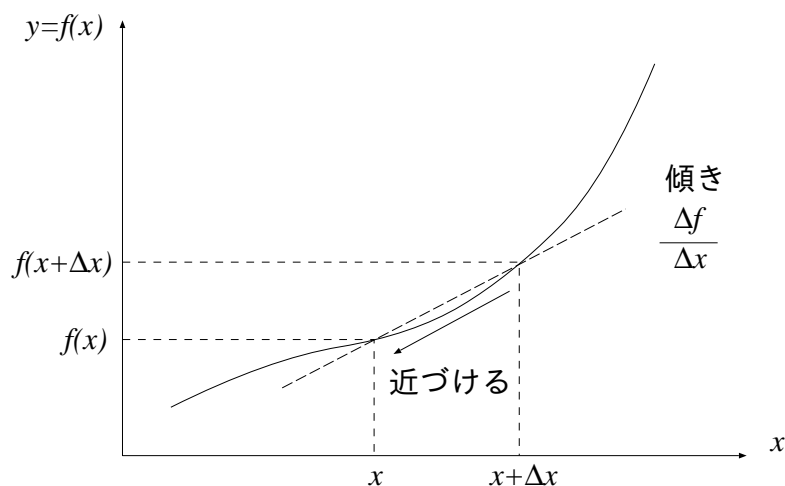
$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (\text{A.4})$$

としてよい(考えている対象に比べて  $\Delta x$  が十分小さければ)。要するに、微分とは割り算である。

逆に、

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f'(x_0)\Delta x + f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (\text{A.5})$$

と近似できる (Taylor 展開)。



## 例

1.  $f(x) = C(\text{定数}) \rightarrow f'(x) = 0$
2.  $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$ 、直線の傾きはどこでも  $a$ 。
3.  $f(x) = ax^2 \rightarrow f'(x) = 2ax$   
 なぜなら、 $f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^2 = a(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) \simeq ax^2 + 2ax\Delta x = f(x) + 2ax\Delta x \rightarrow f'(x) = 2ax$
4.  $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$   
 なぜなら、 $f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^n = ax^n + nax^{n-1}\Delta x + \dots$
5.  $f(x) = \exp(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$  (後述)  
 なお、 $\exp(x) \equiv e^x$  と書く。
6.  $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = 1/x$   
 なお、 $\ln x \equiv \log_e x$  (自然対数)、 $\log x \equiv \log_{10} x$  (常用対数) と略記する。

 $\ln x$  の微分の導出の例

$$\frac{d \ln x}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.6})$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{\Delta x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad n \equiv \frac{x}{\Delta x} \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \quad (\text{A.11})$$

### $e^x$ の微分の導出の例

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{dy}{dx} \quad y = e^x \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad x = \ln y \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{1}{\frac{d \ln y}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x \quad (\text{A.14})$$

## 積分の復習

基本的に、微分の逆。

- 不定積分...積分範囲を指定しない(積分定数がつく)
- 定積分...積分範囲を指定。積分定数はつかない。

$$\int g(x)dx = f(x) \quad (\text{A.15})$$

のとき、

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (\text{A.16})$$

つまり、

$$\int g(x)dx = \int \frac{df(x)}{dx}dx = \int d(f(x)) = f(x) \quad (\text{A.17})$$

これを理解するには、

$$\int dx \left( = \int 1dx \right) = x + C \quad (\text{A.18})$$

だったことを思い出せばよい。

なお、積分定数  $C$  は、微分すればゼロになる(定数なので)ので、つけておかないといけない。

正しく積分できたかどうかをチェックするには、微分して元に戻るかを試せばよい。

**例**

$$\int ax^b dx = a \frac{x^{b+1}}{b+1} \quad (\text{A.19})$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (\text{A.20})$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (\text{A.21})$$

$$\int_a^b x dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad (\text{A.22})$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \quad (\text{A.23})$$

地学概論(気象分野) 講義ノート

2010年3月16日

---

長島雅裕(長崎大学教育学部)

<http://astro.edu.nagasaki-u.ac.jp/~masa/>

---