

1 はじめに

(略)

2 一様等方宇宙を記述する方程式¹

通常、宇宙は一様・等方と仮定される (宇宙原理)。いま、宇宙項 Λ を含む Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

を考える。ここで $g_{\mu\nu}$ はメトリック、 $R_{\mu\nu}$, R はそれぞれリッチテンソル及びリッチスカラー、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。ここで一様等方を示す Robertson-Walker metric

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dx^2}{\sqrt{1 - Kx^2}} + x^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.2)$$

を代入する (K は曲率、 a は scale factor を表わす)。ここで x は共動座標で、物理的な距離は $r = a(t)x$ となる。以下、現在 ($t = t_0$) の時に $a(t_0) = 1$ となるように正規化する。赤方偏移 z とは $a = 1/(1+z)$ の関係で結ばれる。さて、ここから独立な式として、

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.3)$$

及び

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.4)$$

を得る (Friedmann 方程式)。ここで ϵ, p はそれぞれエネルギー密度と圧力である。また、 H は Hubble parameter であり、屢々

$$H \equiv 100h \text{ km/s/Mpc} \quad (2.5)$$

と無次元量 h で表わす (最近の観測は $h \simeq 0.7$ を示唆)。今回は recombination 以降のみを扱うので、考えている物質はいわゆるダスト近似が可能であり、 $p = 0$ と置く (dark matter は圧力を感じない)。また密度 $\rho \equiv \epsilon/c^2$ を定義しておく。

さて、平坦 ($K = 0$) で宇宙項なしの場合 (Einstein-de Sitter 宇宙)、

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.6)$$

となる。この時の密度を臨界密度 ρ_c と定義すると、

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.7)$$

¹Einstein 方程式からの Friedmann 方程式の導出についてはここでは触れないので、関連する教科書を参照のこと。

となる。

ここで、参考までに H 以外の宇宙論パラメータをまとめておく。

$$\Omega \equiv \rho/\rho_c \quad \text{密度パラメータ} \quad (2.8)$$

$$k \equiv K/H^2 a^2 \quad \text{曲率係数} \quad (2.9)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/3H^2 \quad \text{宇宙項} \quad (2.10)$$

$$q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2 \quad \text{減速パラメータ} \quad (2.11)$$

と定義される。これらを用いると、Friedmann 方程式は

$$\Omega - k + \Omega_\Lambda = 1 \quad (2.12)$$

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + 3\frac{p}{\epsilon} \right) \Omega - \Omega_\Lambda \quad (2.13)$$

となる。現在の値の宇宙論パラメータを用いると、一つめの式は

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} - \frac{k_0}{a^2} + \Omega_\Lambda \quad (2.14)$$

となる (radiation が無視できる場合; $\rho \propto a^{-3}$)。

2.1 Friedmann 方程式の意味

ここで式 (2.3) を t で微分し、出てきた \ddot{a} に式 (2.4) を代入すると、

$$\frac{d}{dt} \epsilon a^3 + p \frac{d}{dt} a^3 = 0 \quad (2.15)$$

が得られる。体積を $V = a^3$ とし、内部エネルギーを $U = \epsilon V$ とすれば、これは即ち

$$dU + p dV = 0 \quad (2.16)$$

となり、断熱膨張となっていることがわかる。実際には内部の物質の反応により宇宙のエントロピーは増えているが、宇宙膨張自体は断熱変化である。

次に、式 (2.3) を変形すると、

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 + V(a) = E \equiv -\frac{Kc^2}{2} \quad (2.17)$$

$$V(a) = -\frac{GM}{a} - \frac{\Lambda c^2 a^2}{6} \quad (2.18)$$

となる (ここで $M = 4\pi G\rho_0 a^3/3$, $\rho_0 = \epsilon/c^2$)。これは、位置座標を a とした場合の、potential $V(a)$ 中での一次元の運動として解釈できることを示している。FIG.1 に、宇宙論パラメータを変えた場合の定性的振舞いを示す。上の図において、現在の膨張率 (H_0) は観測より決まる量であるので、全てのモデルに対し fix されるが、宇宙年齢はパラメータによって変化することがわかる。また特徴的な振舞いとして、宇宙項が存在する場合は過去のある時期に potential の「頂上」付近を通るため (下図) 膨張が非常に遅くなる時期があり、宇宙年齢が伸びることになる。

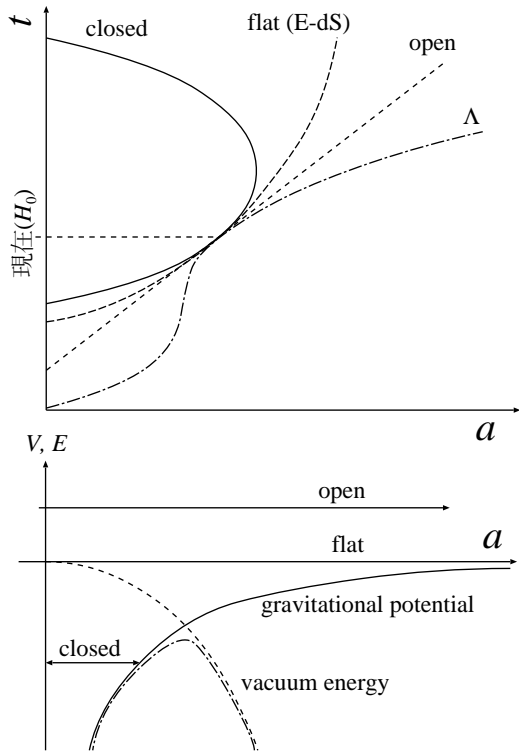


图 1:

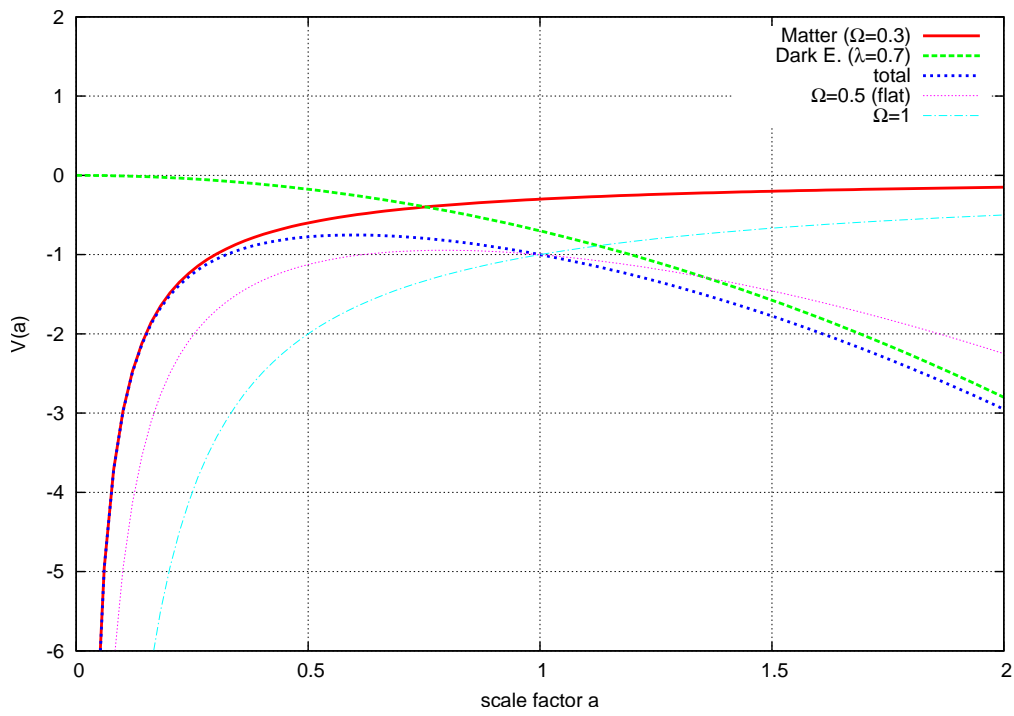


图 2:

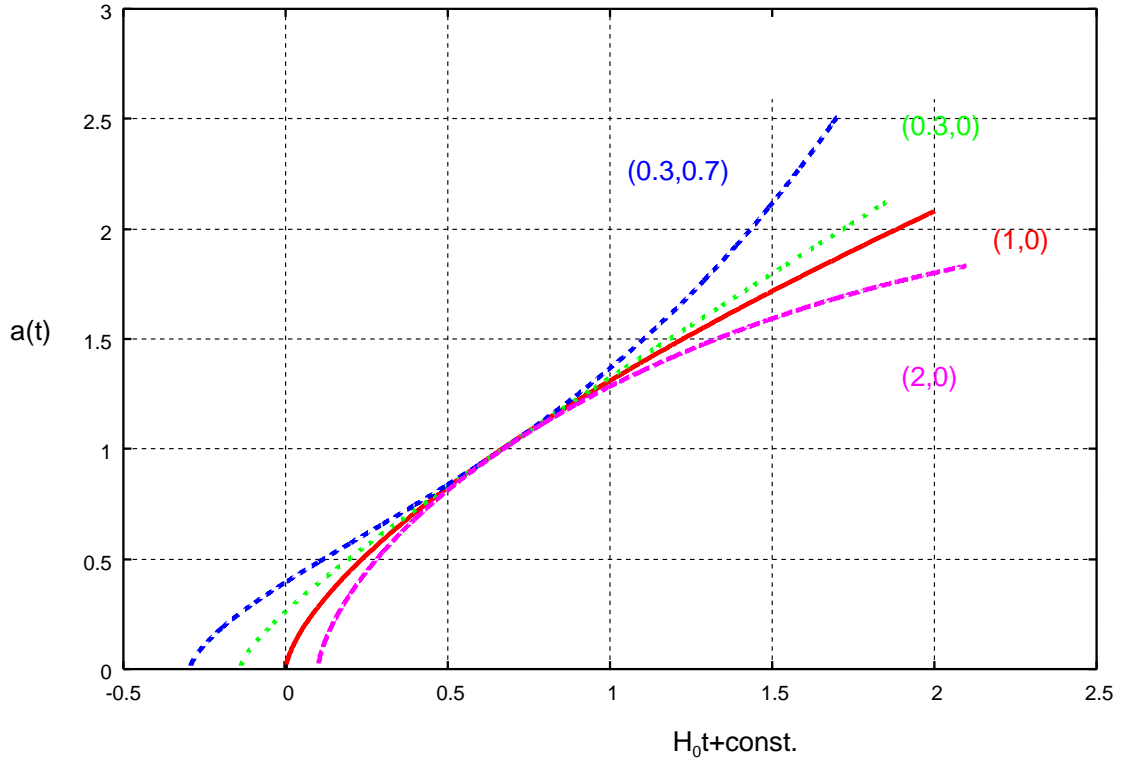


図 3:

2.2 輻射、物質、曲率、宇宙項が支配する時期

式 (2.3) あるいは (2.14) の右辺の項のそれぞれが支配的になる時期を調べる (以下 $\rho = \epsilon/c^2$ の質量密度で見る)。エネルギー密度において、物質だけでなく輻射の寄与も考慮すると、各項の scale factor に対する依存性は、輻射、物質、曲率、宇宙項の順に $a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^0$ である。従って、これらの順に、宇宙膨張への寄与が重要になる時期が現われる。宇宙初期には曲率や宇宙項は物質密度に比べて微小であり、宇宙膨張の振舞いは $K = 0, \Lambda = 0$ の Einstein-de Sitter 宇宙とほぼ同じになる。

まず、輻射優勢期を見る。式 (2.3) より、

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} \propto a^{-4} \quad (2.19)$$

であるから、 $\dot{a} \propto a^{-1}$ であり、

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad (2.20)$$

となる。

やがて輻射のエネルギー密度は急速に落ち、物質の方が優勢になってくる。輻射と物質のエネルギー密度が等しくなるのがほぼ $a \sim 10^{-4}$ の頃である (導出は省略。現在の宇宙背景輻射の温度と、温度が $1/a$ に比例することと、現在の物質密度が与えられれば求められる)。物質が優勢の時期は、同様にして

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad (2.21)$$

となる。

やがて、曲率項が (あれば) 効きだしてくる。この時期は、

$$\frac{\Omega_0}{a^3} \simeq \frac{|k_0|}{a^2} \quad (2.22)$$

となる $a(t)$ であるから、結局

$$a \simeq \frac{\Omega_0}{k_0} \quad (2.23)$$

であり、もし宇宙項が $0(\Omega_\Lambda = 0)$ とすると、 $k_0 = \Omega_0 - 1$ であるから

$$a \simeq \frac{\Omega_0}{|\Omega_0 - 1|} \quad (2.24)$$

となる。この場合、式 (2.3) より

$$a(t) \propto t \quad (2.25)$$

となる。

もし宇宙項が存在し、宇宙が平坦 ($k_0 = 0$) であると、比較すべきは

$$\frac{\Omega_0}{a^3} \simeq \Omega_\Lambda \quad (2.26)$$

となるので、宇宙項が支配的になるのは

$$a \simeq \left(\frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} \right)^{1/3} \quad (2.27)$$

となる。この場合は、

$$a(t) \propto \exp(\sqrt{H_0^2 \Omega_\Lambda} t) \quad (2.28)$$

と inflation 的膨張を起す。

3 密度揺らぎの成長則

3.1 流体近似

ここでは、考えている領域の大きさが horizon より十分小さい、物質の速度が光速に比べ十分小さい、という Newton 近似、及び考えている領域の大きさが、考えている物質の平均自由行程より十分大きい、という流体近似が成り立つ場合を考える。銀河や銀河団スケールでは、CDM モデルで recombination 以降を考える限り、以上の仮定は十分成り立つと考えてよい。流体近似が使えるのは微小な密度揺らぎが自己重力でジワジワと集まってくるような場合のみであり、ひとたび collapse してしまうと DM 粒子の速度が空間の一価関数ではなくなるため近似が破綻する。このような場合には、原理的には Boltzmann 方程式に戻って考えなければならない。

ダークマターは相互作用の弱い物質であるため、無衝突粒子として扱うことになる。このような場合、本来は Boltzmann 方程式を解く必要があるが、これは自由度が大きすぎ解くのが困難である。ところが、いま考えているのは CDM である。CDM は定義により $kT \ll mc^2$ であるため、速度分散は非常に小さい。すると、空間のある点における粒子の速度はほぼ揃っており、速度場 $v(x)$ として考えれば良いことになる。すると、ダークマターの運動は圧力ゼロ、粘性なしの流体力学方程式に従うことになる。

以下では、硬い d が Lagrange 微分を示すものとする。流体力学方程式の導出については Appendix を参照のこと。

3.1.1 連続の式

まず、連続の式 (質量保存の式) を Lagrange 的に考える。体積 dV の流体素片の質量は $dm = \rho dV$ であるが、これが保存するので

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (3.1)$$

である。分解すると、

$$\frac{d}{dt}(\rho dV) = dV \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{ddV}{dt} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{dV} \frac{ddV}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

となる。ここで簡単のため左右にのびた一次元系を考えると、第二項は流体素片の体積の時間変化であり、それはこの流体素片の右側の端の速度-左側の端の速度、 dv で与えられる。即ち、

$$\frac{ddV}{dt} = dv \quad (3.4)$$

これを用いると、

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dv}{dV} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.5)$$

となる。

次に Euler 的に見てみよう。

一辺が ΔL の固定された微小な立方体を考える ($\Delta V = \Delta L^3$ 、 Δ は空間的に固定された微小量を示すものとする)。この立方体内の物質の増減を調べよう。この立方体の質量の増減は、立方体への流入・流出によるので (湧き出し・吸い込みはない)、質量の変化

$$\Delta m = \Delta(\rho \Delta V) = \Delta V \Delta \rho \quad (3.6)$$

がゼロでないとすると、必然的に流れがあることになる。ここで体積 ΔV は一定であることを使った。

次に、流れがあるとき、この立方体に流れ込む・流れ出す物質の量を求めよう。簡単のため、流れの方向は x 軸方向であるとする。速度 v で物質が流れているとき、時間 Δt の間に入ってくる物質の量、出ていく物質の量の差は、

$$\rho(x)v(x)S\Delta t - \rho(x+\Delta L)v(x+\Delta L)S\Delta t \quad (3.7)$$

となる。ここで立方体の面積 $S = (\Delta L)^2$ である。ここで質量流束 $j \equiv \rho v$ を定義すると、上式は

$$j(x)S\Delta t - j(x+\Delta L)S\Delta t = [j(x) - j(x+\Delta L)]S\Delta t = -\frac{\partial j(x)}{\partial x} \Delta L S \Delta t = -\frac{\partial j(x)}{\partial x} V \Delta t \quad (3.8)$$

と変形できる。ここで Taylor 展開を使った。

さて、式 (3.6)、(3.8) は等しいはずであるから、

$$V \Delta \rho = -\frac{\partial j(x)}{\partial x} V \Delta t \quad (3.9)$$

である。両辺 $V \Delta t$ で割ると、

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = -\frac{\partial j(x)}{\partial x} \quad (3.10)$$

となるが、左辺は空間を固定し、時間だけを変化させた場合の質量の変化に相当するので、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では、これは時間の偏微分を意味する。従って、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j(x)}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

となる。

いままでは、流れは x 方向だけと仮定していたが、一般化するとベクトルで書くことができ、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.12)$$

と書ける。ここで

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.13)$$

である。 \hat{x} などは単位ベクトルである。

さて、Lagrange 形式と Euler 形式のそれぞれを見比べてみると、Lagrange 微分は以下の関係があることがわかる。

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (3.14)$$

本当にこれが成り立っているかを考えよう。簡単のために、また一次元系で考える。Lagrange 微分の中身を考えてみると、

$$\frac{d\rho}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(x + \Delta x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(x + v\Delta t, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} \quad (3.15)$$

ここで

$$\rho(x + v\Delta t, t + \Delta t) \simeq \rho(x, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta t \quad (3.16)$$

であるので、結局

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (3.17)$$

となり、実際に成り立っていることがわかる。

3.1.2 運動方程式

次に、体積 dV の流体素片についての運動方程式を考えよう。

Newton の運動方程式より、力を F とすると、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F \quad (3.18)$$

となる ($m = \rho dV$)。次に力を考える。一つは重力であり、重力ポテンシャルを Ψ とおくと、力は $-m \nabla \Psi$ である。重力ポテンシャルと密度との関係は、

$$\Delta \Psi = 4\pi G \rho \quad (3.19)$$

である (Poisson 方程式)。

次に流体の場合も考慮して圧力に起因する力を考えておく。ここでも簡単のためにまずは一次元系で考えよう。流体素片の断面積を S とおき、奥行を dL とすると ($dV = SdL$)、圧力勾配による力は

$$p(x)S - p(x + dL)S = -\frac{\partial p}{\partial x} SdL = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (3.20)$$

三次元の場合は方向ベクトルを掛けて足し上げれば良いので、単純に $-dV\nabla p$ となる。

まとめると、運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -dV\nabla p - \rho dV\nabla\Psi \\ \rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Psi \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。これを Euler 方程式と呼ぶ。もし粘性などを考慮すると、右辺の力の項にそれらが加わることになる (Navier-Stokes 方程式)。

以上より、解くべき式は、Lagrange 形式で書くと

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v} \quad (3.22)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Psi \quad (3.23)$$

$$\Delta\Psi = 4\pi G\rho \quad (3.24)$$

である。

3.2 膨張宇宙での流体方程式

次に、background が膨張しているもとの流体力学方程式を考える。

既に述べたように、空間座標は物理的な距離 r と共動座標 x の両方で表され、これらの関係は scale factor を通じて

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x} \quad (3.25)$$

となっている。前節で導いた流体力学方程式は当然 r についてのものであるため、ここでは x についての式に書き直し、宇宙膨張の効果がどのように表れるかを見てみよう。

まず空間微分については、上の関係より

$$\nabla_r = \frac{1}{a}\nabla_x \quad (3.26)$$

となる (∇ の添字はどの座標での微分を実行するかを示す)。次に時間微分であるが、まず上の関係式より速度は

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{v}_H + \mathbf{u} \quad (3.27)$$

と書ける。ここで \mathbf{v}_H は宇宙膨張の速度であり、 \mathbf{u} はそこからのズレ (固有速度) である。

これらを用いると、Lagrange 微分の特性から、

$$\frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_r + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f \quad (3.28)$$

$$= \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_x f \quad (3.29)$$

となるのがわかる。若干変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_r &= \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_x - \left(\mathbf{v} \cdot \nabla_r - \frac{1}{a}\mathbf{u} \cdot \nabla_x\right) f = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_x - ([\mathbf{v}_H + \mathbf{u}] \cdot \nabla_r - \mathbf{u} \cdot \nabla_x) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_x - \mathbf{v}_H \cdot \nabla_r f = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_x - H\mathbf{x} \cdot \nabla_x f\end{aligned}\quad (3.30)$$

となる ($H = \dot{a}/a$)。従って、

$$\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_r = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_x - H\mathbf{x} \cdot \nabla_x f \quad (3.31)$$

である。無論、式 (3.15) のように導いても同じことである。

以上をふまえて、Euler 形式での膨張宇宙における流体力学方程式を書く (添字のない偏微分は x での微分)、

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_r \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla\rho + \frac{\rho}{a}\nabla \cdot (\mathbf{v}_H + \mathbf{u}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\rho}{a}\nabla \cdot (\mathbf{v}_H) + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a}\nabla(\rho\mathbf{u}) = 0\end{aligned}\quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_H + \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla(\mathbf{v}_H + \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{x} \frac{\partial\dot{a}}{\partial t} + H(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{a}\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} \\ &= \ddot{a}\mathbf{x} + H\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{a}\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} \\ &= -\frac{1}{a\rho}\nabla p - \frac{1}{a}\nabla\Psi\end{aligned}\quad (3.33)$$

$$\Delta\Psi = 4\pi G\rho a^2 \quad (3.34)$$

となる。

3.3 バックグラウンド

次に、摂動論を考えよう。まずはゼロ次を考える。速度については、固有速度 \mathbf{u} 自体が摂動であることに注意する。

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \rho_1 \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{u} \\ \Psi = \Psi_0 + \phi \\ p = p_0 + p_1 \end{cases} \quad (3.35)$$

これらより、ゼロ次の方程式は

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + 3H\rho_0 = 0 \quad (3.36)$$

$$\mathbf{x} \frac{\partial\dot{a}}{\partial t} = -\frac{1}{a}\nabla\Psi_0 \quad (3.37)$$

$$\Delta\Psi_0 = 4\pi G\rho_0 a^2 \quad (3.38)$$

となる。

まず連続の式を見てみよう。これは以下のように容易に変形できる。

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 a^3) = 0 \quad (3.39)$$

$\rho_0 \propto a^{-3}$ であるから、これは質量保存の法則、あるいは断熱膨張を示している。

次に運動方程式であるが、両辺に ∇ を作用させると、

$$3\ddot{a} = -\frac{1}{a}\Delta\Psi_0 = -4\pi G\rho_0 a \quad (3.40)$$

となり、結局

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\rho_0 a}{3} \quad (3.41)$$

となり、Friedmann 方程式に一致する。

3.4 線型領域

次に、密度がほぼ一様の宇宙初期の状態を考え、一次の摂動を調べる。速度場 \mathbf{u} は既に微小量であることに注意し、また密度コントラストとして $\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_1/\rho_0$ を定義すると、 $\delta \ll 1$ の場合、

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 + 3H\rho_1 + \frac{\rho_0}{a}\nabla\cdot\mathbf{u} &= \frac{1}{a^3}\frac{\partial\rho_1 a^3}{\partial t} + \frac{\rho_0}{a}\nabla\cdot\mathbf{u} = \rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) + \frac{\rho_0}{a}\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \rightarrow \dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} + H\mathbf{u} &= -\frac{1}{a}\nabla\phi - \frac{1}{a\rho_0}\nabla p_1 = -\frac{1}{a}\nabla\phi - \frac{1}{a}\nabla\frac{c_S^2\rho_1}{\rho_0} \quad (\odot\nabla p_0 = 0) \\ &= -\frac{1}{a}\nabla\phi - \frac{c_S^2}{a}\nabla\delta \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho_0\delta a^2 \quad (3.44)$$

となる。ここで c_S は音速であり、 $c_S^2 = p_1/\rho_1$ である。上式を δ のみの式に変形すると、

$$\ddot{\delta} = -2H\dot{\delta} + 4\pi G\rho_0\delta + \frac{c_S^2}{a^2}\Delta\delta \quad (3.45)$$

となる。これを δ についての運動方程式とみなし、式を解釈してみよう。右辺第一項は、宇宙膨張がいわば摩擦項として効いていることを示している。宇宙が膨張することによって、密度揺らぎの成長が抑えられている。また、曲率や宇宙項が効きだし、膨張率が相対的に大きくなると、揺らぎの成長を遅くする効果がある。従って、このような宇宙モデルでは、現在観測されているような構造を作るためには、high- z で既に構造を作っておかなければいけないということの意味する。次に第二項であるが、これは重力により揺らぎを成長させる「力」である。第三項は、圧力により、揺らぎが上に凸の部分で成長を抑えられることを意味している

次に、摂動が平面波 $\delta \propto \exp(\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ として分散関係を導く (\mathbf{k} は comoving)。揺らぎが不安定、即ち成長するための条件は $\omega > 0$ である。代入すると、この条件は

$$k^2 < k_J^2 \equiv \frac{a^2}{c_S^2}4\pi G\rho_0 = \frac{3}{2}\Omega H^2\frac{a^2}{c_S^2} \quad (3.46)$$

あるいは

$$\lambda > \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_S^2}{G\rho_0 a^2}} \simeq \frac{c_S}{aH} \quad (3.47)$$

となる (λ は comoving)。ここで λ_J は Jeans 波長と呼ばれ、これより短いスケールの揺らぎは成長できない。この条件は自己重力が圧力勾配より強いことに相当する (スケールの違いによる揺らぎの成長の違いは後述)。

ここで、 λ_J が時間と共にどのように変化するかを見る。radiation dominant ($z \gtrsim 10^4$) では、 $c_S \simeq c/\sqrt{3}$ なので ($p = \rho c^2/3, \rightarrow c_S^2 = c^2/3$)、 $\lambda_J \simeq L_H/\sqrt{3}$ となり、horizon 半径とほぼ等しくなる (L_H は comoving での horizon 半径)。つまり、horizon より小さなスケールの揺らぎは成長できない。

equal time から recombination までの間 ($10^3 \lesssim z \lesssim 10^4$) は、CDM は定義により $p \sim 0$ であるので、 $\lambda_J \sim 0$ となり、ほぼ全てのスケールで成長できる。しかし、baryon に関しては、エネルギーは非相対論的物質が支配しても、圧力は輻射が支配しているため、 $c_S^2 \propto a^{-1} (\propto T)$ となり、 $\lambda_J \propto a^{-1/2}/\dot{a} \simeq \text{const.}$ となる。

最後に、recombination 以降 ($z \lesssim 10^3$) を考える。baryon が感じる圧力は baryon 自身が生み出すので、 $p \propto \rho^{5/3}$ となり、音速は $c_S \propto a^{-1}$ 、Jeans 波長は $\lambda_J \propto a^{-1/2}$ となる。

実際には、diffusion damping などの効果で、baryon の小スケールの揺らぎは慣らされるが、ここでは割愛する。

次に、equal time 以降の揺らぎが時間と共にどのように成長するかを調べる。時間発展の式 (3.45) に於いて $c_S = 0$ と置いたものが基本方程式となる。簡単のために E-dS 宇宙 ($\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 0$) を考えると、 $H = 2/3t$ であるから

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0 \quad (3.48)$$

となり、 $\delta \propto t^\alpha$ と置くと

$$\alpha = \frac{2}{3}, -1 \quad (3.49)$$

と二階微分方程式であることより二つの階が得られ、一般解が

$$\delta(t) = C_1 t^{2/3} + C_2 t^{-1} \quad (3.50)$$

と二つのモードの重ね合わせで書けることになる。ここで第一項が成長 (growing) モード、第二項が減衰 (decaying) モードである。以下では一般に growing モードを $D(t)$ と書く。E-dS の場合、scale factor で書くと $D \propto a$ となる。なお、super horizon scale の揺らぎは相対論的取り扱いによって $D \propto a^2$ となることがわかっている。

なお、一般に decaying mode は $\delta \propto H$ となる。従って、Wronskian を用いて growing mode も求めることができる ($\Omega_\Lambda = 0$ の場合は解析解がある)。

次に速度揺らぎについて調べる。連続の式 (3.42) と Poisson 方程式 (3.44)、及び線型段階での密度揺らぎが $\dot{\delta} = (\dot{D}/D)\delta$ と書けることから、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{fH}{4\pi G\rho_0 a} \Delta\phi \quad (3.51)$$

となる。ここで

$$f \equiv \frac{\dot{D}}{D} \frac{a}{\dot{a}} \simeq \Omega^{0.6} \quad (3.52)$$

は growth factor と呼ばれる。これを積分すると、一般には

$$\mathbf{u} = -\frac{fH}{4\pi G\rho_0 a} \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.53)$$

となるが、渦度は decaying mode しかなく、線型段階では無視して良いため

$$\mathbf{u} = -\frac{fH}{4\pi G\rho_0 a}\nabla\phi \quad (3.54)$$

と置いてよい。これらは、 δ と \mathbf{u} が観測から求まれば、 f を通じて Ω_0 が決まることを示している。

最後に、線型段階での重力ポテンシャルの進化について触れておく。Einstein-de Sitter 宇宙では、 $\rho_0 \propto a^{-3}$, $\delta \propto a$ より、

$$\phi \propto \rho_0 \delta a^2 \propto a^0 \quad (3.55)$$

となり、重力ポテンシャルは時間に依存しない。宇宙項が効き出し、揺らぎの成長が鈍くなると、むしろ重力ポテンシャルは浅くなる (これが Integrated Sachs-Wolfe 効果の起源である)。

3.5 非線型領域

$\delta \sim 1$ となると、もはや線型近似は使えず、非線型効果を考慮して計算をしなければならない。Euler 座標での逐次近似で δ の高次の項を求める方法はあるが、 $\delta < 1$ でしか原理的に使えず、実際には δ がかなり小さくてもすぐに破綻してしまう。

N -body simulation をやってみると、次の図のように線型と非線型の揺らぎが対応がつくことが知られている (但し、図は個々の揺らぎではなく分散になっている)。

一方、Lagrange 座標での近似、即ち流体素片の運動を追いかける近似はかなり良い結果を与えることが知られている。First order は Zel'dovich 近似として知られ、流体素片の位置 r は、その Lagrange 座標での位置 q と

$$\mathbf{r} = a(\mathbf{q} + D\nabla\varphi) \quad (3.56)$$

のように、potential φ で書ける。固有速度は

$$\mathbf{u} = a\dot{\mathbf{x}} = a\dot{D}\nabla\varphi \quad (3.57)$$

であり、式 (3.54) を用いると

$$\frac{\dot{D}}{D}\delta + \frac{1}{a}\nabla\mathbf{u} = 0, \quad (3.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = a\dot{D}\Delta\varphi, \quad (3.59)$$

$$\rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\delta}{D} \quad (3.60)$$

となる。

なおこれは 1 次元シート重力系の exact 解になっており、膨張宇宙では収縮する領域の非等方性がますます強まるという性質を反映して良い近似になっていると考えられる。

ただし、これも DM 粒子のすり抜け (orbit crossing, shell crossing) が起こると破綻する近似である。

ここで Zel'dovich 近似を用いた天体の崩壊を議論しておく。一様流体 (Lagrange 座標 q) から崩壊するので、質量保存より

$$\rho d^3x = \bar{\rho} d^3q \quad (3.61)$$

が成り立つ。従って、密度の発展は

$$\rho = \left| \frac{d^3x}{d^3q} \right|^{-1} \bar{\rho} \equiv J^{-1}\bar{\rho} \quad (3.62)$$

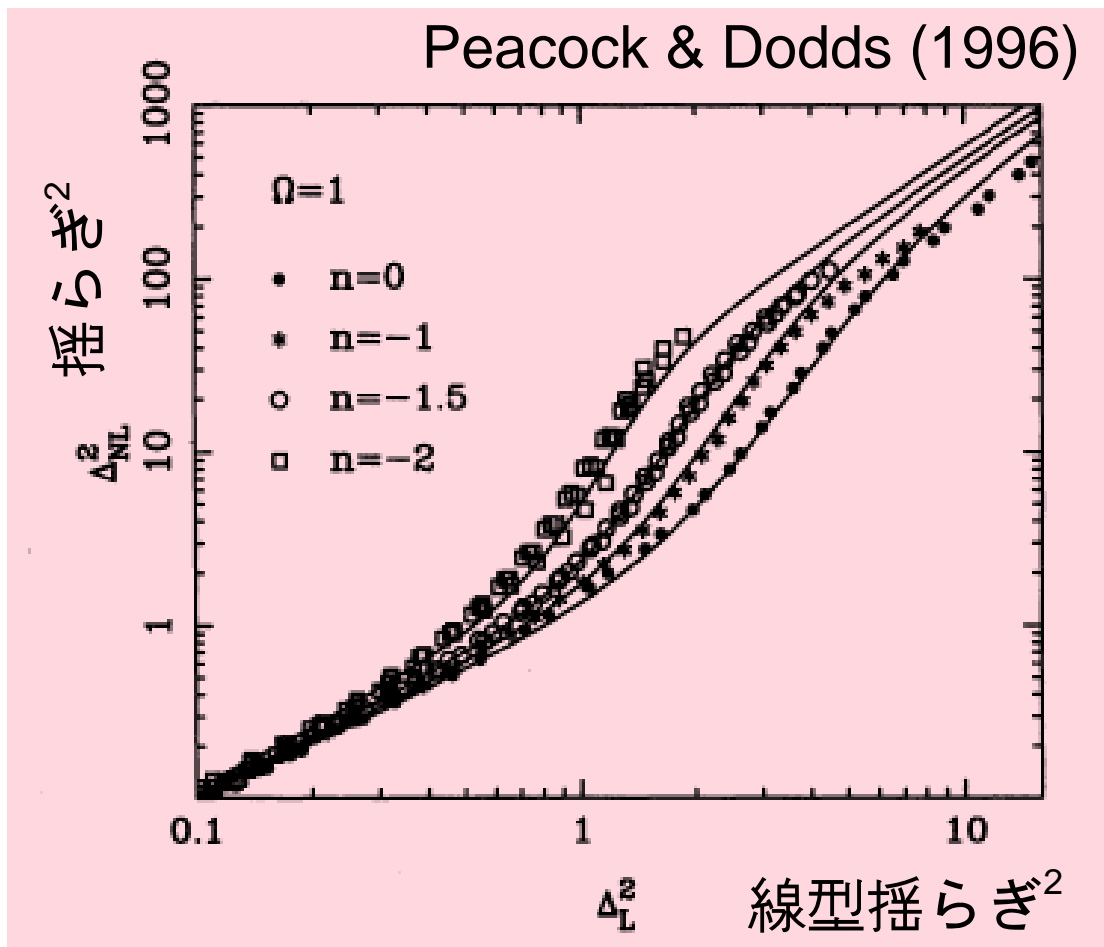


図 4:

で与えられる。この Jacobian J は、Zel'dovich 近似を使えば

$$J = \prod_{i=1}^3 (1 - D\lambda_i) \quad (3.63)$$

となる。ここで $(1 - D\lambda_i)$ は J の固有値である。つまり、 D が大きくなるに従って、固有値の大きい順、即ち初期により潰れている方向に先に崩壊することになる。これは、膨張宇宙に於ける構造形成は、まづシートの collapse し、次にフィラメント状になり、やがてノットのようになるということを示唆している。

3.6 球対称解

天体形成に至る非線型段階を記述するモデルとして、球対称に分布した揺らぎ (質量 M 、半径 r) に対する解がある。運動方程式は、単純に

$$\ddot{r} = -\frac{GM(\leq r)}{r^2} \quad (3.64)$$

であり、これがサイクロイド曲線

$$r = \frac{GM(\leq r)}{C}(1 - \cos \theta) \quad (3.65)$$

$$t = \frac{GM(\leq r)}{C^{3/2}}(\theta - \sin \theta) \quad (3.66)$$

を描くことは良く知られている (ただし、宇宙項が存在すると斥力項がつく)。従って、揺らぎの発展は、shell 内の平均密度が $\bar{\rho}(\leq r) = 3M/4\pi r^3$ となることから求めることができる。初期 ($\theta \ll 1$) の時、 θ で展開すると、

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{1}{6\pi G t^2} \left[1 + \frac{3C}{20} \left(\frac{6t}{GM} \right)^{2/3} + \dots \right] \quad (3.67)$$

となる。いま、E-dS 宇宙を考えると、平均密度は

$$\bar{\rho} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (3.68)$$

線型揺らぎは $\delta_L \propto D \propto t^{2/3}$ なので、上の球対称解は

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta_L + \dots) \quad (3.69)$$

とみなすことができる。

やがて、球殻内の自己重力により、球殻は宇宙膨張から切離されて収縮をはじめ。 $\theta = \pi$ の時に r は最大になるが、これを maximum expansion、この時期を turn around などと呼ぶ。この時の密度は、宇宙の平均密度に対して

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = 6\pi G t^2 \cdot \frac{3\pi}{32G t^2} = \frac{9\pi^2}{16} \simeq 5.5 \quad (3.70)$$

であり、この時刻での線型揺らぎは

$$\delta_{L,ta} = \frac{3C}{20} \left(\frac{6t_{ta}}{GM} \right)^{2/3} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \simeq 1.05 \equiv \delta_{ta} \quad (3.71)$$

となる。つまり、ある時刻 z_0 で揺らぎ $\delta_0 (\ll 1)$ を持つ領域は、線型揺らぎが $\delta_L \propto D \propto 1/(1+z)$ であることから、 $\delta_{ta} = \delta_0 D_{ta}/D_0$ より

$$1 + z_{ta} = \frac{\delta_0}{\delta_{ta}} (1 + z_0) \quad (3.72)$$

となる z_{ta} の時に最大膨張を迎えることになる。

さらに r が再び 0 になる時点を collapse と定義すると ($\theta = 2\pi$)、同様にしてその時刻での線型揺らぎが

$$\delta_{L,c} = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} \simeq 1.69 \quad (3.73)$$

となるのがわかる。この時、実際の密度は形式的には発散するが、物理的に考えると速やかに virial 平衡に達するであろう。この時の半径 r_c を求めよう。ここで、Energy 保存を考慮し、turn around 時 (速度 0) と、collapse 後 (virial 平衡) を結びと、

$$\frac{GM^2}{r_{ta}} = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{r_c} \quad (3.74)$$

となる。つまり、collapse 後の virial 半径 r_c は、最大膨張時の半径 r_{ta} の半分であることがわかる。この時の平均密度に対する密度比は、 $\rho_c = 2^3 \rho_{ta}$, $t_c = 2t_{ta}$ を考慮すると、

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = 18\pi^2 \simeq 178 \quad (3.75)$$

となる。従って、collapse 直後の天体の内部の平均密度は、その時刻での宇宙の平均密度のおよそ 200 倍であることがわかる。

以上を用いると、揺らぎの amplitude を、現在まで線型成長を続けているとして normalize すると、ある点での揺らぎの大きさと、その点が collapse する時刻 z_c との間には、 $\delta = \delta_c (1 + z_c)$ という関係のあることがわかる (詳細は後述)。つまり、初期の揺らぎの分布を見れば、ある時刻でどれくらいの領域が collapse しているか、mapping することが可能になる。

3.7 揺らぎの持つ角運動量の成長

領域 Γ が collapse するとして、この領域の持つ角運動量がどうなるかを調べよう [15, 6, 3, 4, 11]。角運動量 L は、定義により

$$L(t) = \int_{\Gamma} (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}) \times \mathbf{u} \rho d^3 r \quad (3.76)$$

ここで質量保存 $\rho d^3 x = \bar{\rho} d^3 q$ 、 $\mathbf{u} = a\dot{\mathbf{x}}$ 、 $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$ を使うと

$$L(t) = \bar{\rho} a^5 \int_{\Gamma} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \times \dot{\mathbf{x}} d^3 q \quad (3.77)$$

となる。Zel'dovich 近似を用いると、

$$L(t) = \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \times \nabla \varphi d^3 q \quad (3.78)$$

である。ここで

$$\bar{\mathbf{q}} = \Gamma^{-1} \int_{\Gamma} \mathbf{q} d^3 q \quad (3.79)$$

である。これより領域の非球対称性が重要であることがわかる。

次に、potential φ を \bar{q} のまわりに展開する。

$$\varphi(\mathbf{q}) = \varphi(\bar{\mathbf{q}}) + (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \cdot \nabla \varphi|_{\mathbf{q}} + \dots \quad (3.80)$$

これを式 (3.78) に代入すると、

$$L(t) = \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} \epsilon_{ijk} (q_j - \bar{q}_j) (q_l - \bar{q}_l) \partial_k \partial_l \varphi(\bar{\mathbf{q}}) \quad (3.81)$$

となる。 ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである。ここで potential の微分の項を

$$\mathcal{D}_{kl} \equiv \partial_k \partial_l \varphi(\bar{\mathbf{q}}), \quad (3.82)$$

inertial tensor を

$$\mathcal{I}_{jl} \equiv \bar{\rho} a^3 \int_{\Gamma} (q_j - \bar{q}_j) (q_l - \bar{q}_l) \quad (3.83)$$

とすると

$$L(t) = a^2 \dot{D} \epsilon_{ijk} \mathcal{D}_{kl} \mathcal{I}_{jl} \quad (3.84)$$

となり、時間に依存する項を見ると、E-dS 宇宙では

$$L(t) \propto a^2 \dot{D} \propto t \quad (3.85)$$

と時間の一次に比例して増大することになる。実際には、maximum expansion のあたりで角運動量の獲得は止まり、あとは保存して collapse することになる。つまり

$$\delta = D_{ta} \Delta \varphi = \delta_{ta} \simeq 1.05 \quad (3.86)$$

となるところまで成長する。

inertia tensor を見ると、次元的に $\mathcal{I} \sim MR^2$ であり、上の式と合わせて、これは $M^{5/3}/D_{ta} \propto M^{5/3} t_{ta}^{-2/3}$ に比例する。これより、maximum expansion での、即ち最終的にハローが獲得する角運動量は

$$L_f \propto M^{5/3} t_{ta}^{1/3} \quad (3.87)$$

となる。

通常、角運動量を議論する際は、無次元の spin parameter λ を用いる。これは、

$$\lambda \equiv \frac{L |E_{\text{tot}}|^{1/2}}{GM^{5/2}} \quad (3.88)$$

で定義される。角運動量が 0 なら 0、完全に rotation support になっていれば $\simeq 1$ となる。図 5 に、Catelan & Theuns による λ の分布を示す。詳細は略すが、これは初期に Gauss 分布する揺らぎの場を考え、揺らぎのピークになる点のまわりの角運動量の分布がどうなるかを計算したものである。パラメータになっている ν は揺らぎの高さの尺度で、揺らぎの偏差を σ の何倍かを示す ($\nu = \delta/\sigma$)。 ν が大きいほど早く collapse するので、それだけ獲得する角運動量も小さいということになる。

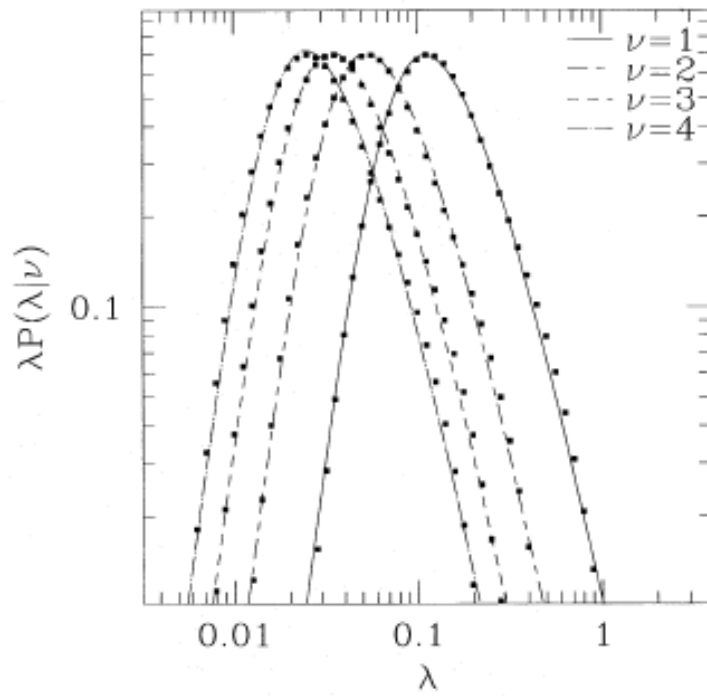
いづれの ν にしても、 $\lambda \lesssim 0.1$ がほとんどを占めている。つまり、ダークハローはほとんど回転していないことを示している。ただし、これが銀河になる際には内部のガスがエネルギーを失って収縮するため、結果的には $\lambda \simeq 1$ となる。

この分布は、いわゆる log-normal 分布で良く fit される。

$$p(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda} \exp \left[-\frac{(\ln \lambda - \ln \bar{\lambda})^2}{2\sigma_\lambda^2} \right] d \ln \lambda, \quad (3.89)$$

ここで $\bar{\lambda}$ は平均の λ 、 σ_λ は $\log \lambda$ の分散である。大体 $\bar{\lambda} = 0.05$ 、 $\sigma_\lambda = 0.5$ となる。

Catelan & Theuns (1996)



⊗ 5:

4 密度揺らぎの統計的性質

4.1 Gauss 分布

密度揺らぎ δ は、 $\delta \ll 1$ の時代には通常 random Gaussian 揺らぎであると仮定される。揺らぎの分散を $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$ と置くと、一点分布関数は

$$f(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta \quad (4.1)$$

となる。ここで σ^2 は揺らぎの分散であり、 $\sigma^2 \equiv \langle \delta^2 \rangle$ である。 δ の Fourier 変換は、

$$\delta_{\mathbf{k}} \equiv |\delta_{\mathbf{k}}| e^{i\phi_{\mathbf{k}}} = \int \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (4.3)$$

であり、 $\phi_{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} 成分の位相である。random Gaussian 揺らぎは位相に相関がなく、

$$\langle \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} \rangle \propto \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (4.4)$$

である。amplitude の自乗平均は、power spectrum と呼ばれ、

$$P(k) \equiv \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \quad \langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'} \rangle = P(k) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (4.5)$$

で定義される。ここで $\langle \rangle$ は ensemble 平均を表し、また一様等方性より $P(\mathbf{k}) = P(k)$ とした。重要な関係として、二体相関関数 $\xi(r) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ と

$$P(k) = \int \xi(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.6)$$

という Fourier 変換の関係にある。また、Gaussian random field の特徴として、 $P(k)$ 或いは $\xi(r)$ によって、一意的に分布が定まる。

次に、power spectrum の時間進化を見よう。通常、inflation 直後に生成される揺らぎは $P(k) \propto k$ と仮定され、Harrison-Zel'dovich spectrum と呼ばれる。 $t < t_{\text{eq}}$ では horizon より大きい揺らぎは a^2 に比例して成長し、horizon 内の揺らぎは成長しない。一方、 $t > t_{\text{eq}}$ の揺らぎは、どのスケールでも一様に成長する。従って、その様子を図に描くと、FIG.6 のようになる。なお、分散に直すと、 $\sigma^2 \simeq \int P(k) d^3k \simeq k^3 P(k)$ であるから、短波長側 ($k > k_{\text{eq}}$) では $\sigma \sim \text{const.}$ となる。ただし、実際には完全に成長が止まるわけではなく、log 的な成長があるため、完全に一定値になるわけではない。

詳細な計算では、power spectrum を initial (Harrison-Zel'dovich) とそこからの変形 (transfer function) に分けて、

$$T(k) = \frac{\ln(1 + 2.34q)}{2.34q} [1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4]^{-1/4}, \quad (4.7)$$

ここで

$$q = \frac{k}{\Omega_0 h^2 \text{Mpc}^{-1}}, \quad (4.8)$$

得られる power spectrum は

$$P(k, t_f) \propto T^2(k) P(k, t_i) \quad (4.9)$$

となる。ここで

$$P(k, t_i) \propto k^n \quad (4.10)$$

であり、 $n = 1$ なら Harrison-Zel'dovich spectrum である。

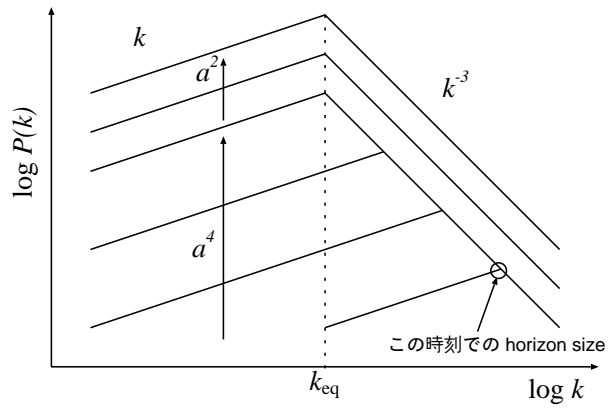


図 6:

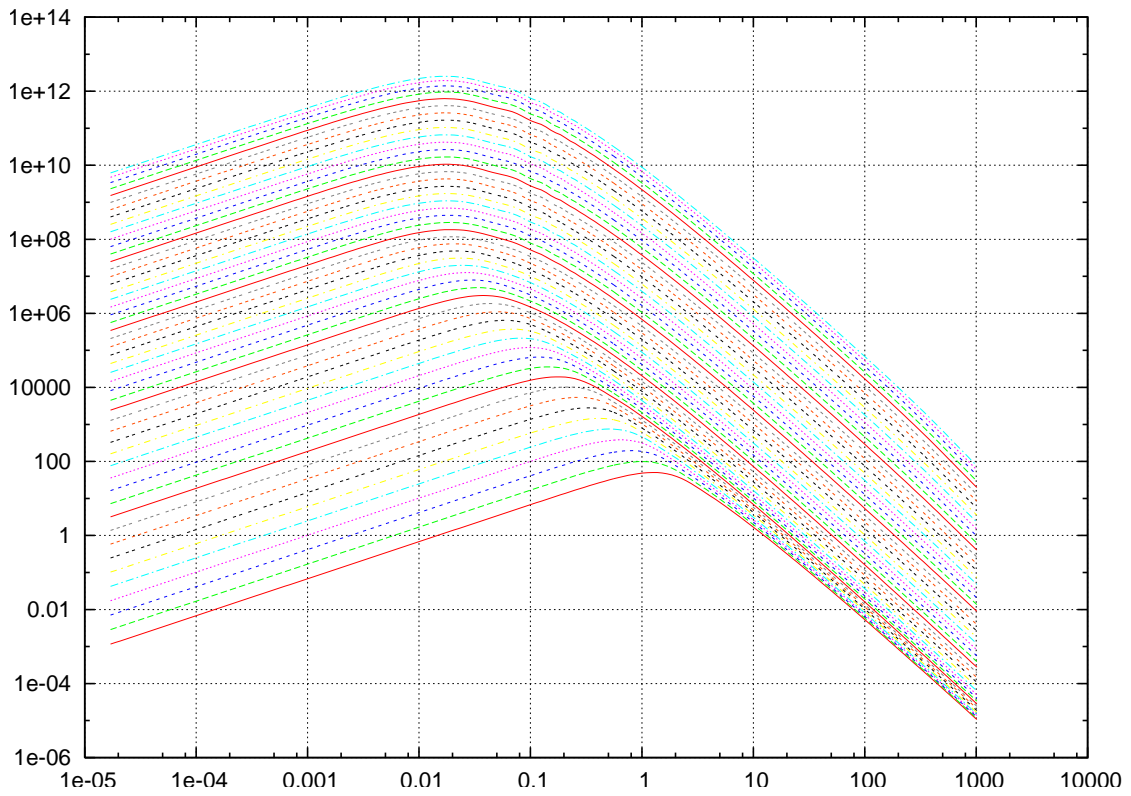


図 7:

4.2 密度揺らぎの smoothing

通常仮定される CDM の power spectrum は紫外発散を起こしているので、意味のある揺らぎにするために粗視化 (smoothing) を実行する。以下では、 $\delta \ll 1$ の状況のみ考えるが、前章の議論から、線型段階の δ と非線型の δ は球対称解を用いて mapping できるので、球対称解の範囲で非線型成長も考慮できることになる。

適切な Window 関数 $W_M(\mathbf{x})$ を考える。これは、空間積分を実行すると 1 になるように規格化されているものである。また、以降の議論では、球対称なものを考える。添字の M は、smoothing scale R が球対称で質量が M の領域に相当することを意味し、

$$M \simeq \bar{\rho} R^3 \quad (4.11)$$

となる。この時、scale M の密度揺らぎ場は、

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.12)$$

で表される。

一方、揺らぎを Fourier 成分で表すと便利であったので、Window 関数も Fourier 変換しておく、

$$\tilde{W}(kR) = \int W_M(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.13)$$

となる。ここで、 k 空間での cut-off scale を k_c とおくと、 $k_c \simeq 2\pi/R$ である。これを用いると、

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \int \tilde{W}(kR) \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (4.14)$$

となる。この粗視化された場で、 $\delta = \delta_c$ となる点が、粗視化のスケールで天体として collapse すると考えることができる。

以下に、しばしば用いられる Window 関数 (filter) の形を挙げておく。

1. Top-hat filter

$$W_M(r) = \frac{3}{4\pi R^3} \theta\left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (4.15)$$

$$\tilde{W}(kR) = \frac{3}{(kR)^3} (\sin kR - kR \cos kR) = \frac{3}{kR} j_1(kR). \quad (4.16)$$

2. Gaussian filter

$$W_M(r) = \frac{1}{(2\pi R^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right), \quad (4.17)$$

$$\tilde{W}(kR) = \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right). \quad (4.18)$$

3. Sharp k -space filter

$$W_M(r) = \frac{\sin k_c r - k_c r \cos k_c r}{2\pi^2 r^3} = \frac{k_c^2}{2\pi r} j_1(k_c r), \quad (4.19)$$

$$\tilde{W}(kR) = \theta(k_c - k), \quad (4.20)$$

$\theta(x)$ は Heaviside の step function である。

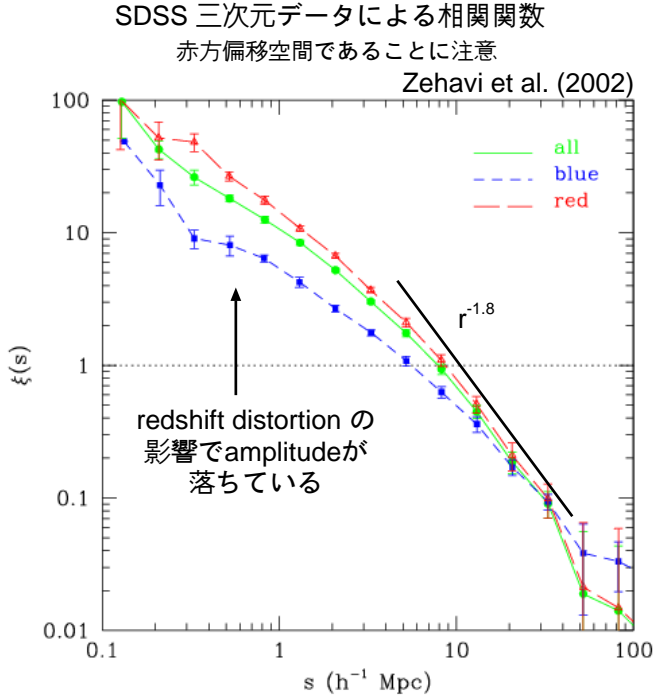


図 8:

4.3 二体相関関数

揺らぎの二体相関関数は

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (4.21)$$

で定義される。ここで等方性より $\xi(r) = \xi(r)$ とした。これは距離 r 離れた点での揺らぎの値がどれだけ相関しているかを示す量である。この δ を Fourier 変換すると、

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad (4.22)$$

となり、 ξ が power spectrum $P(k) = \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ の Fourier 変換になっていることがわかる。

なお、本当は smoothing された field での二体相関関数であるため $P(k)$ に対して window function $\tilde{W}^2(kR)$ を掛けて積分する必要があるが、 $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{ikr \cos \theta}$ より角度積分によって $\sin(kr)/kr$ となり、また $R \ll r$ のため、こちらの cut-off の方が重要であり、smoothing は本質的ではない。

ここで $P(k) \propto k^n$ と置くと、

$$\xi(r) \sim k^{n+3} \sim r^{-n-3} \quad (4.23)$$

となる。観測された銀河分布では、 $\xi(r) \simeq (r/5h^{-1}\text{Mpc})^{-1.8}$ となることが知られている。従って、もし銀河と dark matter の分布が同じならば、このスケールで、 $n \simeq -1.2$ 程度になっていなければならない。これは CDM の予想とは大体一致する。

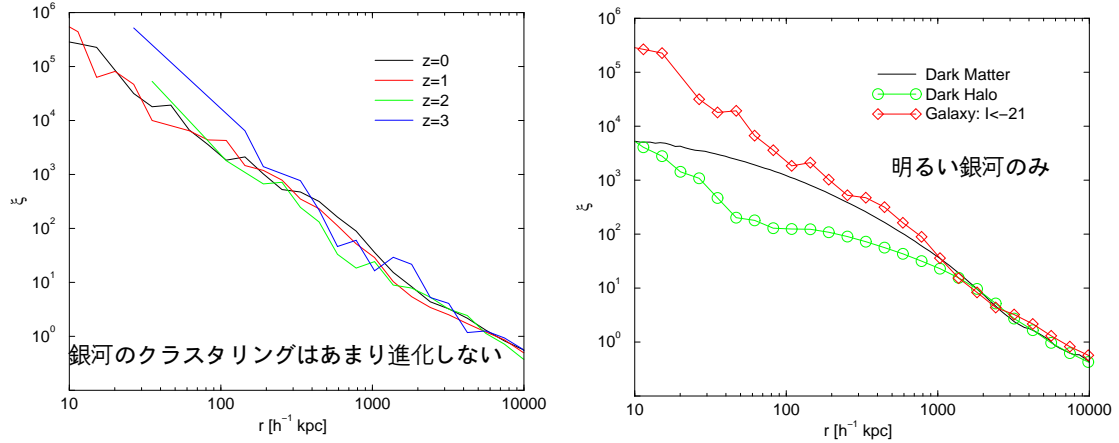


図 9:

実際には、銀河と dark matter の分布は同じではない。それぞれの二体相関関数を ξ_{gg}, ξ_{mm} と書き、

$$\xi_{gg} = b^2 \xi_{mm} \quad (4.24)$$

と置く。この b は bias parameter と呼ばれる。 b は原理的にはスケール、時間に依存するが、簡単に定数とすることが多い。

ここで ξ が 1 になるスケールを考える。つまり、 $\xi(r) = (r/r_0)^{-\gamma}$ と置いた場合の r_0 である。これは ξ の amplitude の指標になっている。dark matter を考えると、線型 (で E-dS) の場合、 $\xi \propto a^2$ であるから、

$$r_0 \propto a^{2/\gamma} \quad (4.25)$$

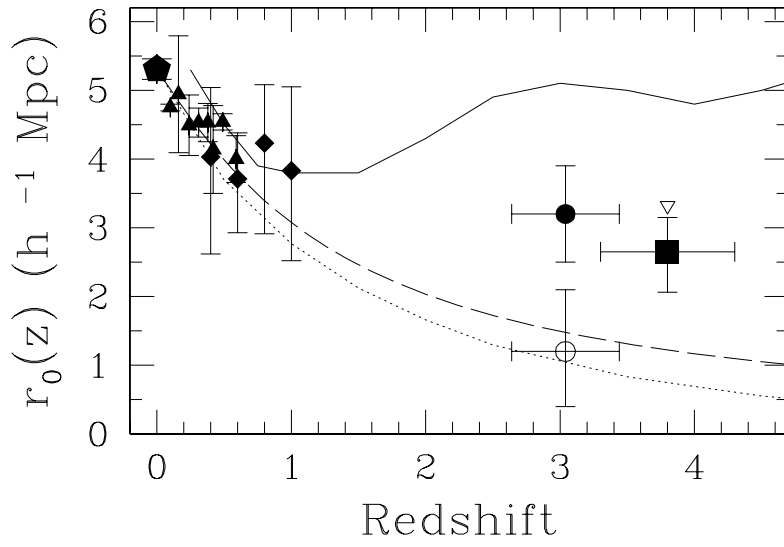
となる。そこで、実際に観測される銀河の相関関数の r_0 が z と共にどう進化するかを見れば、これは銀河形成を理解するためのよい指標になる。high- z での相関関数はまだ観測がはじまったばかりであるが、観測は予想される dark matter の r_0 よりも大きい値を示唆している。 N -body simulation と準解析的モデルの組み合わせによる解析では、 z が大きくなるにつれて bias が大きくなる傾向が見られる (図 11)。

4.4 天体の個数密度

ここでは球対称解と揺らぎの Gaussian 分布から、質量 M の天体の個数密度 $n(M)dM$ を見積る Press-Schechter 近似を紹介する [14]。

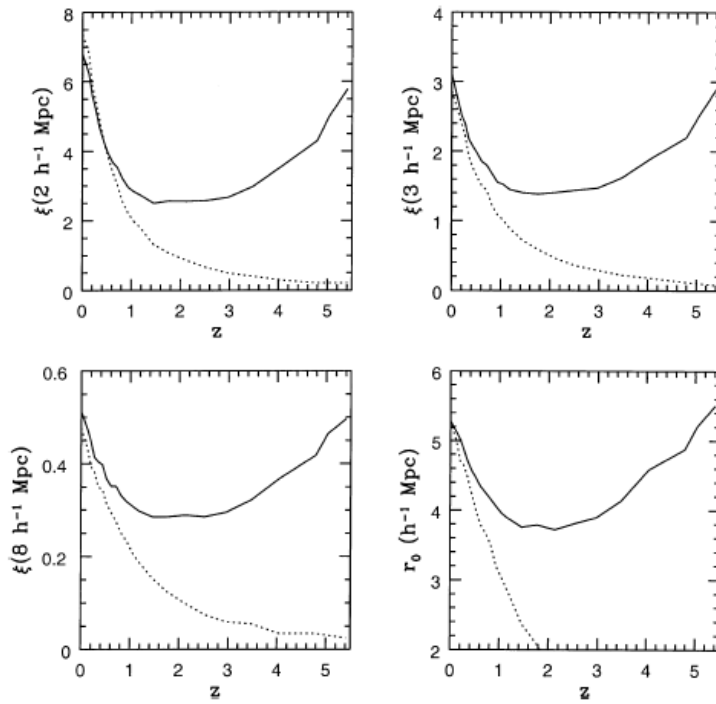
さて、smoothing scale M_1 で δ_c を越える質量 (領域) は、 M_1 よりも大きい天体として collapse するはずである。なぜならば、 $M_2 > M_1$ となるより大きいスケールで smoothing を行えば、丁度 $\delta = \delta_c$ となるスケールが存在するはずだからである。従って、スケール M_1 の場で δ_c を越える領域は、質量 M_1 より大きい天体として collapse する領域内にある、 M_1 で smoothing した時に δ_c を越える領域の和に等しい。この「 M_1 で smoothing した時に δ_c を越える確率 (あるいは全宇宙において δ_c を越える領域にある質量の割合)」を $f(\geq \delta_c; M_1)$ と置くと、解くべき方程式は

$$f(\geq \delta_c; M_1) = \int_{M_1}^{\infty} P(M_1|M_2) \frac{M_2}{\rho} n(M_2) dM_2, \quad (4.26)$$



☒ 10: Ouchi et al. (2001)

Kauffmann et al. (1999)



☒ 11:

となる。ここで、 $P(M_1|M_2)$ は、 M_2 field で丁度 δ_c となる点で、 M_1 field では δ_c を越える確率、

$$P(M_1|M_2) = p(\delta_{M_1} \geq \delta_c | \delta_{M_2} = \delta_c) \quad (4.27)$$

である。これを求めるためには、条件付き確率を求めなければならない。そして、条件付き確率を求めるためには、2変数 $(\delta_{M_1}, \delta_{M_2})$ の Gauss 分布を考える必要がある。

一般に、 N 変数の Gauss 分布は次のように書ける：

$$p(\mathbf{V}^N)d\mathbf{V}^N = \frac{\exp[-Q/2]}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{M})}} d\mathbf{V}^N, \quad (4.28)$$

ここで \mathbf{M} は covariance matrix であり、また

$$Q = \mathbf{V}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}^T \quad (4.29)$$

$$M_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle. \quad (4.30)$$

である。 M_{ij} の要素を sharp k -space filter の場合に具体的に考えると、

$$\langle \delta_1^2 \rangle = \sigma_1^2 = \int_0^{k_1} P(k)4\pi k^2 dk, \quad (4.31)$$

$$\langle \delta_2^2 \rangle = \sigma_2^2 = \int_0^{k_2} P(k)4\pi k^2 dk, \quad (4.32)$$

$$\langle \delta_1 \delta_2 \rangle = \sigma_{12}^2 = \int_0^{k_2} P(k)4\pi k^2 dk = \sigma_2^2, \quad (4.33)$$

$$(4.34)$$

である。いまは filter の性質により、covariance が δ_2 の分散と同じになることに注意。逆行列は

$$\frac{1}{\sigma_2^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_2^2 \\ -\sigma_2^2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

となるので、

$$Q = \frac{1}{\sigma_2^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} (\delta_1 \quad \delta_2) \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_2^2 \\ -\sigma_2^2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \frac{(\delta_1 - \delta_2)^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} + \frac{\delta_2^2}{\sigma_2^2} \quad (4.36)$$

となる。これより、

$$p(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} e^{-\frac{(\delta_1 - \delta_2)^2}{2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} - \frac{\delta_2^2}{2\sigma_2^2}} \quad (4.37)$$

となることがわかるが、

$$p(\delta_2)d\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{\delta_2^2}{2\sigma_2^2}} \quad (4.38)$$

であることに注意すると、

$$p(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}} e^{-\frac{(\delta_1 - \delta_2)^2}{2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}} p(\delta_2) \quad (4.39)$$

であるから、条件付き確率は

$$p(\delta_1|\delta_2) = \frac{p(\delta_1, \delta_2)}{p(\delta_2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}} e^{-\frac{(\delta_1 - \delta_2)^2}{2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}} \quad (4.40)$$

となる。つまり、 δ_2 が指定されている場合、そこからのズレは、smoothing scale の違いがもたらす分散のズレを分散とする Gaussian になることがわかる。

これを用いると、 $\delta_2 = \delta_c$ の時に、 $\delta_1 \geq \delta_c$ となる確率は、

$$P(M_1|M_2) = p(\delta_1 \geq \delta_c | \delta_2 = \delta_c) = p(\Delta\delta \geq 0) = \frac{1}{2} \quad (4.41)$$

となる。

これを元の積分方程式に入れると、

$$f(\geq \delta_c; M_1) = \frac{1}{2} \int_{M_1}^{\infty} \frac{M_2}{\bar{\rho}} n(M_2) dM_2, \quad (4.42)$$

となる。

さて、これを M_1 で微分してみよう。すると、

$$\frac{Mn(M)}{\bar{\rho}} dM = -2 \frac{\partial f(\delta_1 \geq \delta_c; M)}{\partial M} dM \quad (4.43)$$

となる。ここで、変数を正規化してやると、

$$f(\delta \geq \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\delta_c}^{\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\nu_c}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu \quad (4.44)$$

ここで

$$\nu_c = \frac{\delta}{\sigma} \quad (4.45)$$

である。従って、

$$\frac{\partial f}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\nu_c(M)}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu = -\frac{\partial \nu_c}{\partial M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\nu_c^2}{2}} = \frac{\delta_c}{\sigma^2(M)} \frac{\partial \sigma(M)}{\partial M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\nu_c^2}{2}} \quad (4.46)$$

以上より、

$$n(M) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_0 \delta_c}{M^2 \sigma_M} \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}} \quad (4.47)$$

となる。これを Press-Schechter 質量関数と呼ぶが、 $n > -3$ の場合のみ適用可能であることに注意しなければならない。small mass scale では、 $n \propto M^{-2}\sigma^{-1} \propto M^{n-9}6 \sim M^{-2}$ となる。

4.5 より現実的な質量関数

4.5.1 モード間相関

さて、sharp k -space filter を採用した場合は、 $\sigma_{12}^2 = \sigma_2^2$ となるため、kernel が丁度 1/2 となり、解析的な PS 質量関数を書き下すことができた。しかし、sharp k -space filter は、計算を簡単にするための便法に過ぎず、現実的には top-hat filter を用いるのが望ましい。無論、top-hat filter による smoothing は、密度場を”smooth” にしないため、取り扱いがややこしい。そこで、Gaussian filter もしばしば用いられる。

以下では最初から変数を正規化しておこう。

$$\nu_1 = \frac{\delta_1}{\sigma_1}, \quad \nu_2 = \frac{\delta_2}{\sigma_2}, \quad \epsilon^2 = \langle \nu_1 \nu_2 \rangle = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (4.48)$$

ϵ は相関係数であり、1 以下である。すると 2 変数 Gaussian は

$$p(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(\nu_1 - \epsilon\nu_2)^2}{2(1-\epsilon^2)} - \frac{\nu_2^2}{2}} d\nu_1 d\nu_2 \quad (4.49)$$

となる。sharp k -space filter の場合は、 $\epsilon = \sigma_2/\sigma_1$ である。 ϵ の形は、

$$\epsilon = \frac{4\pi}{\sigma_1\sigma_2(2\pi)^3} \int_0^\infty \tilde{W}(kR_1)\tilde{W}(kR_2)P(k)dk \quad (4.50)$$

である。

ここで、sharp k -space filter の時に、 $P(M_1|M_2)$ がどうして $1/2$ になったかを改めて考えてみよう。Gaussian random field は、異なる k のモード間では位相が独立であった。ということは、ある k まで積分して得られたある点での δ に、新たに Fourier mode を足す、つまり filtering scale を小さくすることは、独立な位相のモードを足すことになるため、 δ が大きくなる確率と小さくなる確率が等しく $1/2$ づつになることを意味する (どれくらい変化するかは $P(k)$ に依存する)。ということは、 σ の値を時刻に見立て、 δ の値を位置に見立てると、 δ は random walk することがわかる。

一方、一般の filter では、filtering scale を小さくすると、より長波長のモードの寄与も若干上昇することになる。つまり、filtering scale を変えることに対して、それまでの履歴をひきずることになる。従って、 $\delta > 0$ の点では、 σ を上げるにつれて、より δ を上昇させる方向に確率が大きくなるのに対し、 $\delta < 0$ の点では、より減らす方向に確率が大きくなり、random walk にはならない。そして、このことから $P(M_1|M_2) > 1/2$ であることが期待される。

質量関数への影響を考えると、元の積分方程式に戻って考えてみれば、 $P > 1/2$ であることから大質量ハローの数は PS 質量関数に比べて減ることになる。小質量ハローの数も一見減るような気がするが、左辺 $[f(\delta_1 \geq \delta_c; M_1)]$ の値は変わらないため、小質量ハローの数を増やして辻褃を合わせる必要がある。よって、PS 質量関数に比べ、大質量ハローの数は減り、小質量ハローの数は増える、ということになる。

4.5.2 空間相関

次に、ハローは non-zero の領域で collapse することを考えてみよう。いままでは、ハローは大きさを持っているにもかかわらず、空間上のある一点 x での smoothing scale の異なる密度揺らぎの相関を考えてきた。しかし、実際には、 $\delta_2 = \delta_c$ になる点の周囲で、 $\delta_1 \geq \delta_c$ となる確率を、smoothing scale の範囲内で平均したものを $P(M_1|M_2)$ とする必要がある。

具体的には、

$$\epsilon(r) = \frac{\xi(r)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{4\pi}{\sigma_1\sigma_2(2\pi)^3} \int_0^\infty \tilde{W}(kR_1)\tilde{W}(kR_2)P(k) \frac{\sin kr}{kr} dk \quad (4.51)$$

と、二体相関関数を陽に考えることになる。

詳細は [10, 17] に譲り、定性的傾向だけ解説する。宇宙全体では、 δ_2 の平均は当然 0 である。従って、ある点で $\delta_2 = \delta_c > 0$ となっていれば、その周囲では、確率的には $\delta_2 < \delta_c$ となっている方が多いであろう。つまり、先程とは逆に、 $P(M_1|M_2) < 1/2$ となっていると考えられる。従って、大質量ハローは増え、小質量ハローは減る、ということになる。

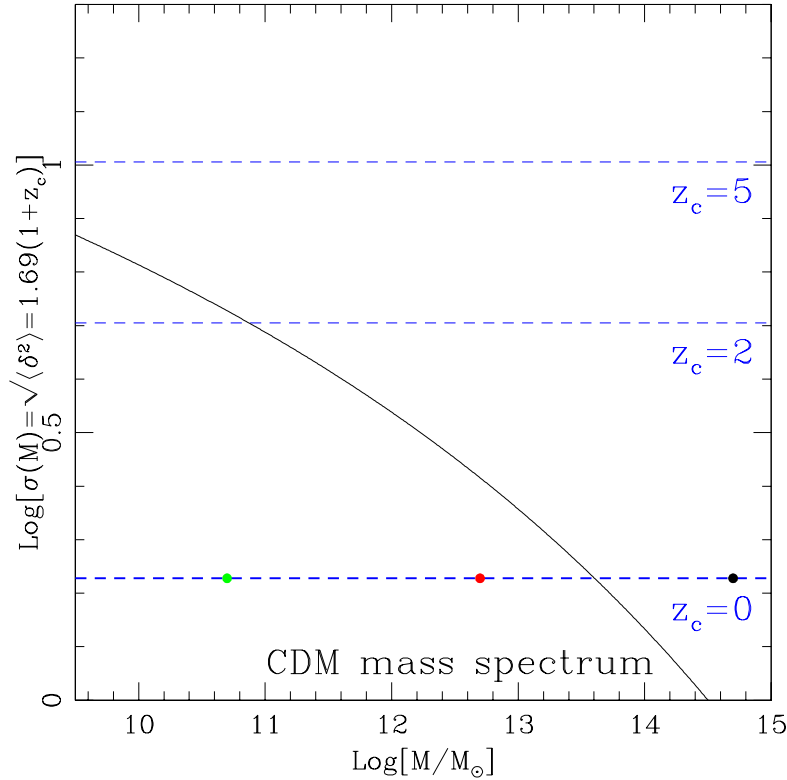


図 12:

4.5.3 ピーク仮説

最後に、ハローは密度揺らぎの「ピーク」を中心に collapse する、という仮説について考えてみよう [1, 12]。

「ピーク」は空間分布に対するものなので、「ピーク」である条件としては、

1. δ の空間微分が 0: $\partial_i \delta = 0$
2. δ が上に凸、即ち二階微分の固有値がすべて負

である。collapse するということから $\delta = \delta_c$ という条件も考慮すると、成分としては 0 階微分が 1 個、1 階微分が 3 個、2 階微分が 6 個で計 10 個の成分を考慮しなければならない。それに加えて M_1 場で $\delta_1 \geq \delta_c$ である確率を求めるのであるから、11 変数の Gauss 分布を解く必要がある。

その振舞いはややこしいので結果については割愛するが、残された課題としては、top-hat filter での peak formalism をどう構築するか、ということが挙げられよう。peak formalism では揺らぎの空間微分が重要な役割を果たすが、top-hat filter は密度場を滑らかにしないため、微分 (の分散) が発散する。滑らかな filter を使い、最終的に limit を取って不連続な top-hat filter にする、などの工夫が必要になるろう。

4.6 ハローバイアス

詳細な導出は他 [9] に譲り、ここでは定性的な意味のみを述べる。

既に示したように、天体となるような構造は、初期に高密度であった領域のみに形成される。特に high- z ではかなり稀な高密度領域のみで天体が形成されるため、天体の分布は dark matter の分布とはかなり異なると予想される。

高密度揺らぎのピークに銀河ができると考えよう。high- z では大質量天体は $\nu(= \delta/\sigma)$ が大きい領域に形成される。このような領域は非常に稀であり、長波長の揺らぎのモードによるかさ上げのある領域で形成されやすい。従って、この時期での δ_c を越える領域のみを切り出すと、強くクラスタリングしていることが予想される。そのため dark matter の分布に対するハロー分布のバイアスが非常に大きく出ることになる。low- z に行くに従い、低密度領域でも天体が形成され出すので、バイアスは小さくなる。

観測される銀河の性質を考えると、large ν の領域は早く collapse することから古い楕円銀河が多く、あとから collapse する領域では青い spiral が多いと考えられる。従って、色や形態による選別を行い相関関数を調べると、ここでもバイアスがあることがわかる。

先の図での $r_0 - z$ 関係は、基本的にはこのようにして理解される。

具体的には、overdense な領域のスケールで smoothing した際に、そこでの $\delta_2 > 0$ の値を設定し、その条件のもとで、質量関数を導けばよいことになる。この場合は、 $\delta_2 < \delta_c$ であることに注意。

4.7 ダークハローの形成史

いままでは同時刻で異なる smoothing scale での密度場の相関に関する話であった。これを拡張し、異なる時刻での解析を行おう。 $z = z_0$ で $M = M_0$ のハローに collapse する領域で、 $z = z_1 (> z_0)$ での質量関数はどうなっているだろうか。

球対称崩壊モデルでは、実際には $\delta \rightarrow \infty$ になる点で、もし線型成長が続いているとした場合の値、 δ_c を求めることができた。E-dS 宇宙では、 $\delta_c = 1.69$ であった。もし、 $z = z_1$ で collapse する領域を知りたいければ、線型揺らぎは $a = 1/(1+z)$ に比例して成長するので、redshift z での collapse の条件は

$$\delta_c(z) = \delta_c(1+z) \quad (4.52)$$

と書けることになる。

これを用いると、次のような条件付確率を考えればよいことがわかる：

$$f(\delta_1 \geq \delta_c(z_1); M_1 | \delta_0 = \delta_c(z_0); M_0) \quad (4.53)$$

さて、積分方程式の kernel $P(M_1 | M_0)$ については、 $z = z_1$ で M_2 で collapse する領域の中に $\delta_1 \geq \delta_c$ の領域がどれくらいあるか、ということであった。今回は、さらなる条件として $z = z_0$ で M_0 で δ_c が課せられる。しかし、これは面倒であるので、以下では sharp k -space filter を使おう。すると、Markov 性より、最後の条件はあってもなくても同じであり、 $1/2$ が維持されることがわかる。

これらより、解くべき式は、条件付質量関数を $n(M_1 | M_0)$ として、

$$f(\delta_1 \geq \delta_c(z_1) | \delta_0 = \delta_c(z_0)) = \frac{1}{2} \int_{M_1}^{\infty} \frac{M' n(M' | M_0)}{\bar{\rho}} dM' \quad (4.54)$$

ということになる。

左辺は、

$$f(\delta_1 \geq \delta_c(z_1) | \delta_0 = \delta_c(z_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(S_1 - S_0)}} \int_{\delta_c(z_1)}^{\infty} e^{-\frac{(\delta_1 - \delta_c(z_0))^2}{2(S_1 - S_0)}} d\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_c}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (4.55)$$

である。ここで、 $y = (\delta_1 - \delta_c(z_0))/(S_1 - S_0)$, $S = \sigma^2$ 。両辺を M_1 で微分すると、

$$\frac{Mn(M|M_0)}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dS_1}{dM} \frac{\delta_c(z_1) - \delta_c(z_0)}{(S_1 - S_0)^{3/2}} e^{-\frac{(\delta_c(z_1) - \delta_c(z_0))^2}{2(S_1 - S_0)}} \quad (4.56)$$

となる。なお、左辺は M_0 で collapse する領域のうち、質量 M の天体が占める質量比を示している。従って、これを個数にするには、 M_0/M を掛ければよく、条件付き質量関数は

$$N(M, z|M_0, z_0) = \frac{M_0}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dS}{dM} \frac{\delta_c(z) - \delta_c(z_0)}{(S - S_0)^{3/2}} e^{-\frac{(\delta_c(z) - \delta_c(z_0))^2}{2(S - S_0)}} \quad (4.57)$$

と表される。

5 銀河形成

5.1 考慮すべき物理過程

今までは dark matter の分布がどのように進化するかを調べてきた。そこでは相互作用としては重力のみを考えればよく、その下で揺らぎや角運動量の性質を考えれば良かった。しかし、銀河の形成過程には様々な物理過程が重要になる。最低限考慮しなければならない物理過程として、

- ガスの冷却

collapse した dark halo 中のガスは、その virial 温度程度にまで加熱されているが、その内部エネルギーを輻射によって散逸させ、halo 中心部に沈殿することで高密度領域を作り、やがて星形成に至る。従っていつごろどのようなサイズの halo が collapse すると、どれだけガスが冷却できるかを調べることは重要である。

- 星形成

冷えたガスがどのようにして星になるかはよくわかっていない。以下では宇宙論的な構造形成を重視する立場から、とりあえず簡単に冷えたガスが適当な time-scale で星になると仮定する。

- 超新星爆発によるフィードバック (ガスの再加熱)

星ができれば短寿命の massive star は爆発し、一旦冷えたガスをまた加熱する。これによってさらなる星形成を阻害する。どれくらいの量のガスを加熱するかは重力ポテンシャルに依存していると考えられるため、dwarf 銀河程度のスケールでは強いフィードバックによって大量のガスが掃き出され、dwarf 銀河を減らすと考えられる。

- 銀河同士の合体

dark halo は順次合体し成長していくが、halo 中の銀河は dark halo が合体してもただちに合体するわけではない。dynamical friction の time-scale で中心に落ち込み、やがて中心の銀河と合体する。さらに一つの halo 中に銀河が多いと、random に衝突する確率も増えることになる。

さらに観測と比較するためには種族合成の手法を用いて個々の銀河からどれくらいの光度が放出されているかも計算する必要がある。

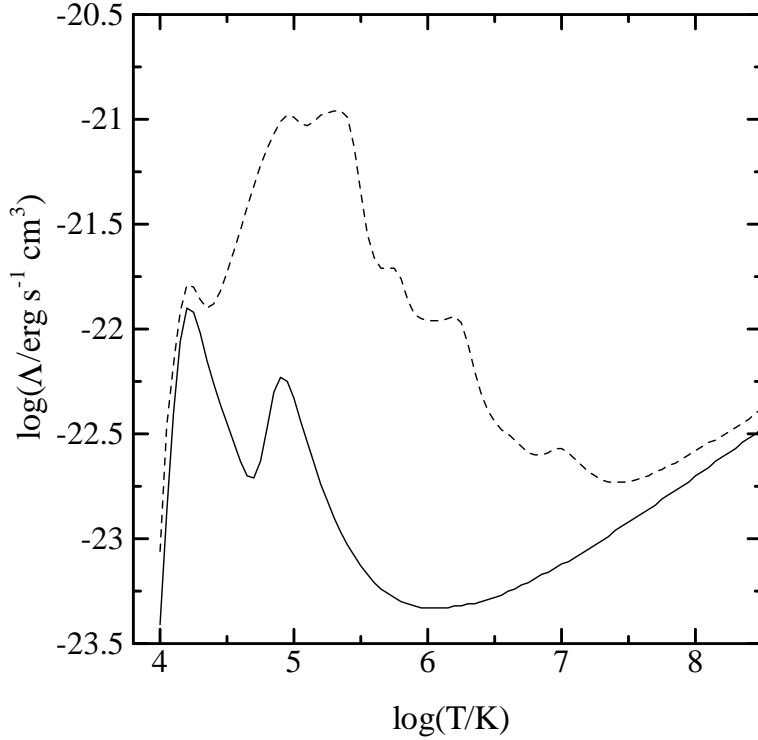


図 13: Sutherland & Dopita (1993)

5.2 ガスの冷却

dark halo が collapse すると、その重力エネルギーは衝撃波により内部のガスを加熱する。重力エネルギーが解放されるので、ガスの温度は大体 virial 温度程度になると考えられる。

$$kT_{gas} \simeq kT_{vir} \simeq \frac{GMm_p}{r} \quad (5.1)$$

銀河より大きなスケールでは、大体 $T > 10^{4-5} \text{K}$ ぐらいになり、銀河団スケールでは 10^7K (1keV) 程度になる。

輻射機構を考えると、 10^{4-5}K では水素原子の line cooling、即ち衝突により電子の準位がたたき上げられ、その後自発的に準位を下げる際に光子を放出することでエネルギーを散逸させる機構が重要になる。一方、 10^7 程度では、baryon はほぼ完全にイオン化しており、電子による制動輻射 (bremsstrahlung) が重要になる。

エネルギー散逸率を普通 cooling function と呼び、 Λ で表す。これは温度と重元素量の関数になっている。実際の散逸率はガスの個数密度 n を用いて $n\Lambda$ となる。

ここで halo 中のガスの冷却の time-scale を見積ってみる。これは内部エネルギーがこの散逸率で散逸しきるのに要する time-scale なので、

$$t_{cool} \simeq \frac{kT}{n\Lambda} \quad (5.2)$$

となる。これと系の dynamical time-scale と比較する。dynamical time-scale は

$$t_{dyn} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (5.3)$$

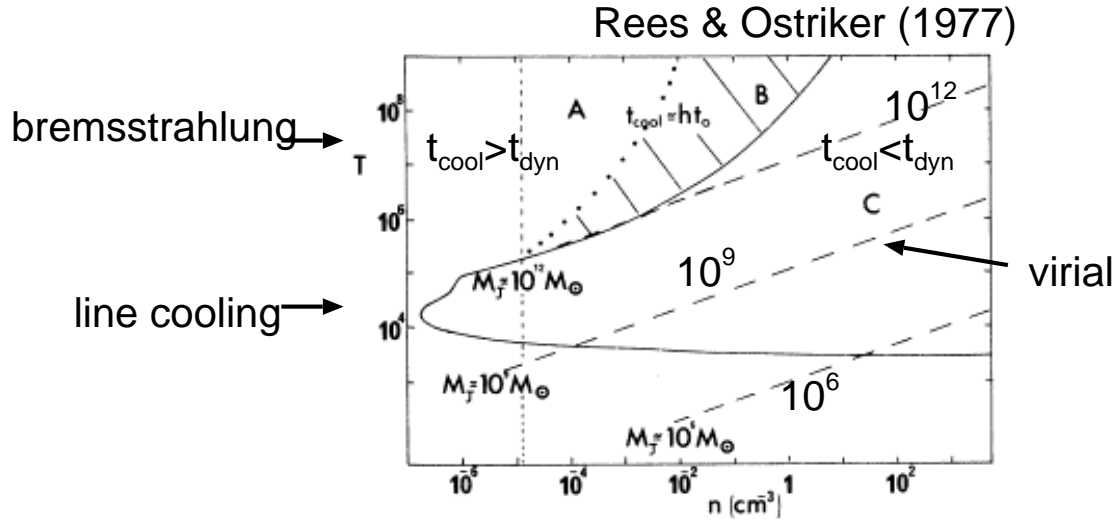


図 14:

である。もし、collapse した halo の状態が $t_{\text{cool}} \ll t_{\text{dyn}}$ ならば、内部の baryon は shock 加熱で生じた温度による圧力を感じることなく、dynamical time-scale で halo 中心部に落ち込んでいく。一方、逆の場合は、銀河団ガスのように圧力で支えられ、準静的にエネルギーを散逸していく。この様子をプロットすると図 14 のようになり、典型的な銀河のスケールが冷却の効く範囲に納まっていることがわかる。

現実の宇宙では、 $z \gtrsim 2$ 程度では QSO からの UV 背景輻射により、cooling が抑えられる可能性がある。ガスが多いと optical depth も大きいので shielding が効いて UV が浸透しにくくなるが、小さい halo では加熱がよく効き得る。従って、dwarf 銀河の形成を抑える可能性がある。

5.3 星形成

冷えたガスの質量を M_{cool} と置く。最も簡単な仮定は、これが適当な time-scale τ_* で星に変わるとすることである。この場合、星形成率 (SFR) は

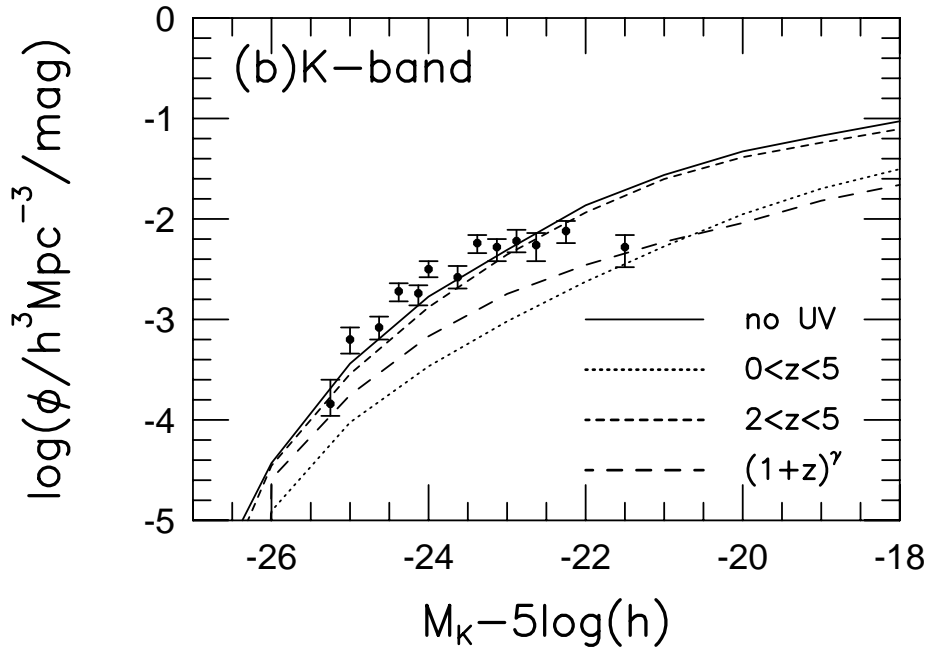
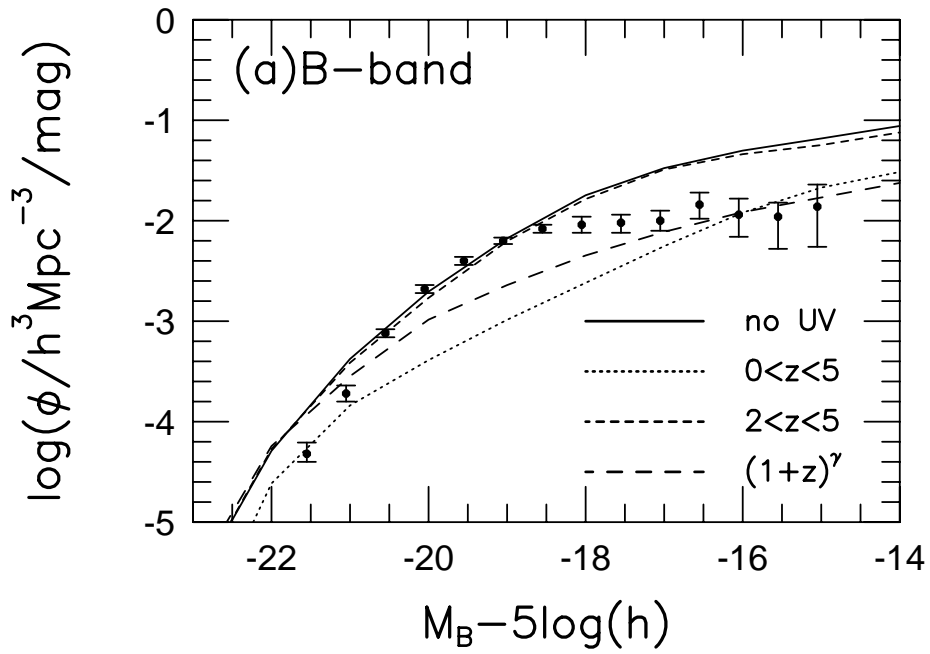
$$\dot{M}_* = \frac{M_{\text{cool}}}{\tau_*} \quad (5.4)$$

となる。単純に考えると、 $\tau_* \simeq t_{\text{dyn}}$ となりそうであるが、各種の計算は t_{dyn} の数十倍になっていることを示唆しているように見える。これは星形成の複雑な物理過程を単純にモデル化していることから生じる喰い違いと考えられる。

5.4 超新星爆発によるフィードバック

超新星の爆発率は、短寿命であることから星形成率に比例すると考えるのは良い近似である。halo の circular velocity が V_c の時のガスの reheating rate は単純な考察では

$$\dot{M}_{\text{reheat}} \simeq \epsilon \frac{\eta_{\text{SN}} E_{\text{SN}}}{V_c^2} \dot{M}_* \quad (5.5)$$



☒ 15: Nagashima, Gouda & Sugiura (1999)

と書ける。ここで η_{SN} は IMF を仮定した時に形成される星 $1M_{\odot}$ あたりの超新星の個数の割合であり、Salpeter IMF 等でおおよそ $7 \times 10^{-3} M_{\odot}^{-1}$ 程度である。 E_{SN} は超新星一発あたりに放出されるエネルギーで、 10^{51} erg である。 ϵ は超新星から放出されるエネルギーが再加熱に使われる効率である。しかし、実際にどれくらいの効率で加熱がおこなわれるかを評価することは非常に難しい。超新星残骸の運動が銀河スケールで多重に起きている場合にどうなるか、残骸の冷却がどれくらい起きるのかを含めて考慮しなければならないからである。

5.5 銀河の合体

通常 dynamical friction による合体が考えられる。普通の公式では、その time-scale は

$$\tau_{\text{fric}} \simeq \frac{V_c^2 r_h^2}{GM_{\text{sat}} \ln \Lambda} \quad (5.6)$$

となる。ここで V_c, r_h は halo の circular velocity, radius であり、 M_{sat} は落ち込むサテライト銀河の質量である。 $\ln \Lambda$ はいわゆる Coulomb logarithm である。実際にはこれ以外にも角運動量や軌道要素、spin 間の相互作用などが絡むと考えられ、もっと複雑であると思われる。また、サテライトの質量も、dark matter 込みなのか、baryon のみなのかで結果が変わるが、それはサテライトが持つ dark matter が tidal stripping 等によってどれくらい剥ぎ取られるかを調べなければならない。

5.6 準解析的モデルによる銀河形成

ここで、一つの例として、いわゆる準解析的モデルによる銀河形成の解析を紹介する。これは、dark halo の clustering を Press-Schechter や N -body simulation によって求め、得られた dark halo の形成史の上で上記の物理過程を計算し、個々の銀河の特性を調べるものである。

以下、このモデルを用いた最近の結果について簡単に紹介する。

6 終わりに

銀河形成は宇宙に於ける構造形成を基礎に展開した理論が観測と直接比較可能な時代に入った。基礎となる大構造形成の理論は、基本的な枠組は既に完成し、業界のトレンドという意味ではもはや「終わった」分野であり、後は細かい問題しか残されていない(少なくとも理論的には)。しかし、銀河や銀河団形成を議論する際には大構造形成の理論は踏まえておく必要があるため、基本的な知識は身につけておかなければならない。無論、大構造を観測的に検証することは当面は重要である。

今日は、銀河形成に直接関わる基礎的な部分として、主に recombination ($z \simeq 10^3$) 以降での密度揺らぎの成長を調べた。また揺らぎの統計的な性質についても調べた。それらをもとに、銀河形成はどのように考えられるべきかについて述べた。銀河形成の物理に関してはまだわかっていないことが多いが、まづ現状のモデルの範囲で観測と丹念に比較を重ね、矛盾点を洗い出す作業が必要である。それと共に、パラメータでしか扱っていない、星形成やフィードバック等の物理についての理解も進めていくことが、今後重要になってくるであろう。

教科書

池内了「観測的宇宙論」、東京大学出版会

岡村定矩「銀河系と銀河宇宙」、東京大学出版会

小玉英雄「相対論的宇宙論」、丸善

富田憲二「一般相対論的宇宙論」、裳華房

須藤靖「ダークマターと銀河宇宙」、丸善

Peebles, P.J.E., “Large-scale Structure of the Universe”, Princeton Univ. Press

Peebles, P.J.E., “Principles of Physical Cosmology”, Princeton Univ. Press

Padmanabhan, T., “Structure formation in the Universe”, Cambridge Univ. Press

Peacock, J.A., “Cosmological Physics”, Cambridge Univ. Press

Lucchin, Coles, P., ”Cosmology”,

参考文献

- [1] Bardeen, J.M., Bond, J.R., Kaiser, N. & Szalay, A.S. 1986, ApJ, 304, 15
- [2] Bond, J.R., Cole, S., Efstathiou, G. & Kaiser, N. 1991, ApJ, 379, 482
- [3] Catelan, P. & Theuns, T. 1996, MNRAS, 282, 436
- [4] Catelan, P. & Theuns, T. 1996, MNRAS, 282, 455
- [5] Furuzawa, A. et al., 1999, IAU symp., 183, 66
- [6] Heavens, A. & Peacock, J. 1988, MNRAS, 232, 339
- [7] Kaiser, N., 1987, MNRAS, 227, 1
- [8] Kundic, S. et al., 1997, ApJ, 482, 75
- [9] Mo, H.J. & White, S.D.M. 1996, MNRAS, 282, 347
- [10] Nagashima, M., 2001, ApJ, 562, 7
- [11] Nagashima, M. & Gouda, N. 1998, MNRAS, 301, 849
- [12] Peacock, J.A. & Heavens, A.F. 1985, MNRAS, 217, 805
- [13] Peacock, J.A. & Heavens, A.F. 1990, MNRAS, 243, 133
- [14] Press, W.H. & Schechter, P., 1974, ApJ, 187, 425
- [15] White, S.D.M. 1984, ApJ, 286, 38
- [16] White, S.D.M., Navarro, J.F., Evrard, A.E. & Frenk, C.S., 1993, Nat., 366, 429
- [17] Yano, T., Nagashima, M. & Gouda, N. 1996, ApJ, 466, 1