

1 はじめに

(略)

2 一様等方宇宙を記述する方程式

通常、宇宙は一様・等方と仮定される (宇宙原理)。いま、宇宙項 Λ を含む Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

に Robertson-Walker metric

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{\sqrt{1-Kr^2}} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.2)$$

を代入する (K は曲率、 a は scale factor を表わす)。ここで r は共動座標で、物理的な距離は $a(t)r$ となる。以下、現在 ($t = t_0$) の時に $a(t_0) = 1$ となるように正規化する。赤方偏移 z とは $a = 1/(1+z)$ の関係で結ばれる。さて、ここから独立な式として、

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.3)$$

及び

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.4)$$

を得る (Friedmann 方程式)。ここで、 H は Hubble parameter であり、屢々

$$H \equiv 100h \text{ km/s/Mpc} \quad (2.5)$$

と無次元量 h で表わす (最近の観測は $h \simeq 0.7$ を示唆)。 ϵ はエネルギー密度、 p は圧力である。今回は recombination 以降のみを扱うので、考えている物質はいわゆるダスト近似が可能であり、 $p = 0$ と置く (dark matter は圧力を感じない)。

ここで、参考までに H 以外の宇宙論パラメータをまとめておく。

$$\Omega \equiv \rho/\rho_c \quad \text{密度パラメータ} \quad (2.6)$$

$$k \equiv K/H^2 a^2 \quad \text{曲率係数} \quad (2.7)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/3H^2 \quad \text{宇宙項} \quad (2.8)$$

$$q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2 \quad \text{減速パラメータ} \quad (2.9)$$

と定義される。ここで ρ_c は critical density であり、 $k = \Omega_\Lambda = 0$ 、即ち Einstein-de Sitter 宇宙における宇宙の平均密度である。これらを用いると、Friedmann 方程式は

$$\Omega - k + \Omega_\Lambda = 1 \quad (2.10)$$

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + 3\frac{p}{\epsilon} \right) \Omega - \Omega_\Lambda \quad (2.11)$$

となる。現在の値の宇宙論パラメータを用いると、一つめの式は

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} - \frac{k_0}{a^2} + \Omega_\Lambda \quad (2.12)$$

となる。

2.1 Friedmann 方程式の意味

ここで式 (2.3) を t で微分し、出てきた \ddot{a} に式 (2.4) を代入すると、

$$\frac{d}{dt}\epsilon a^3 + p\frac{d}{dt}a^3 = 0 \quad (2.13)$$

が得られる。体積を $V = a^3$ とし、内部エネルギーを $U = \epsilon V$ とすれば、これは即ち

$$dU + pdV = 0 \quad (2.14)$$

となり、断熱膨張となっていることがわかる。実際には内部の物質の反応により宇宙のエントロピーは増えているが、宇宙膨張自体は断熱変化である。

次に、式 (2.3) を変形すると、

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = E \equiv -\frac{Kc^2}{2} \quad (2.15)$$

$$V(a) = -\frac{GM}{a} - \frac{\Lambda c^2 a^2}{6} \quad (2.16)$$

となる (ここで $M = 4\pi G\rho_0 a^3/3$, $\rho_0 = \epsilon/c^2$)。これは、位置座標を a とした場合の、potential $V(a)$ 中での一次元の運動として解釈できることを示している。FIG.1 に、宇宙論パラメータを変えた場合の定性的振舞いを示す。上の図において、現在の膨張率 (H_0) は観測より決まる量であるので、全てのモデルに対し fix されるが、宇宙年齢はパラメータによって変化することがわかる。また特徴的な振舞いとして、宇宙項が存在する場合は過去のある時期に potential の「頂上」付近を通るため (下図) 膨張が非常に遅くなる時期があり、宇宙年齢が伸びることになる。

2.2 物質、曲率、宇宙項が支配する時期

式 (2.3) あるいは (2.12) の右辺の三つの項のそれぞれが支配的になる時期を調べる (以下 $\rho = \epsilon/c^2$ の質量密度で見ると)。各項の scale factor に対する依存性は、順に a^{-3} , a^{-2} , a^0 である ($\rho \propto a^{-3}$ に注意)。従って、宇宙初期には曲率や宇宙項は物質密度に比べて微小であり、宇宙膨張の振舞いは $K = 0, \Lambda = 0$ の Einstein-de Sitter 宇宙とほぼ同じになる。この時、式 (2.3) より、

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad (2.17)$$

となる。

やがて、曲率項が (あれば) 効きだしてくる。この時期は、

$$\frac{\Omega_0}{a^3} \simeq \frac{|k_0|}{a^2} \quad (2.18)$$

となる $a(t)$ であるから、結局

$$a \simeq \frac{\Omega_0}{k_0} \quad (2.19)$$

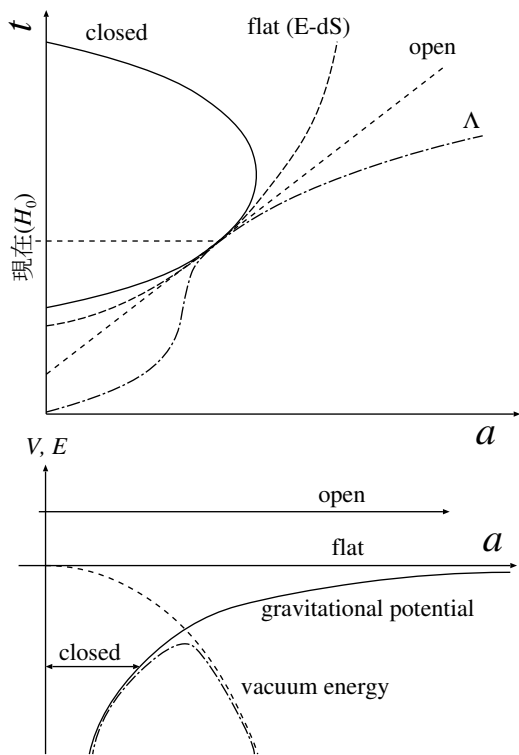


図 1:

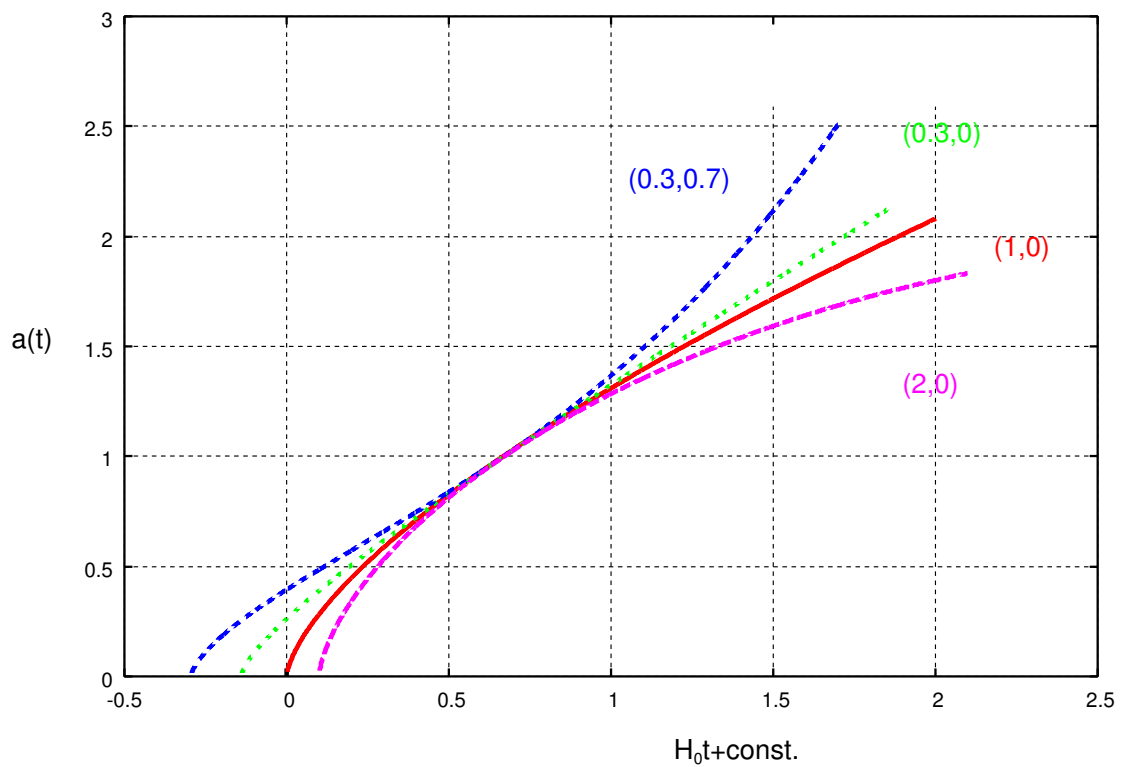


図 2:

であり、もし宇宙項が $0(\Omega_\Lambda = 0)$ とすると、 $k_0 = \Omega_0 - 1$ であるから

$$a \simeq \frac{\Omega_0}{|\Omega_0 - 1|} \quad (2.20)$$

となる。この場合、式 (2.3) より

$$a(t) \propto t \quad (2.21)$$

となる。

もし宇宙項が存在し、宇宙が平坦 ($k_0 = 0$) であると、比較すべきは

$$\frac{\Omega_0}{a^3} \simeq \Omega_\Lambda \quad (2.22)$$

となるので、宇宙項が支配的になるのは

$$a \simeq \left(\frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} \right)^{1/3} \quad (2.23)$$

となる。この場合は、

$$a(t) \propto \exp(\sqrt{H_0^2 \Omega_\Lambda} t) \quad (2.24)$$

と inflation 的膨張を起す。

3 密度揺らぎの成長則

3.1 線型領域

ここでは、考えている領域の大きさが horizon より十分小さい、物質の速度が光速に比べ十分小さい、という Newton 近似、及び考えている領域の大きさが、考えている物質の平均自由行程より十分大きい、という流体近似が成り立つ場合を考える。銀河や銀河団スケールでは、CDM モデルで recombination 以降を考える限り、以上の仮定は十分成り立つと考えてよい。流体近似が使えるのは微小な密度揺らぎが自己重力でジワジワと集まってくるような場合のみであり、ひとたび collapse してしまうと DM 粒子の速度が空間の一価関数ではなくなるため近似が破綻する。このような場合には、原理的には Boltzmann 方程式に戻って考えなければならない。

基本となる流体力学の方程式 (連続の式、Euler 方程式、Poisson 方程式) は、

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Psi - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.2)$$

$$\Delta \Psi = 4\pi G \rho \quad (3.3)$$

であるが、これを膨張する background ($\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$ 、 \mathbf{r} は物理的座標、 \mathbf{x} は共動 [comoving] 座標、 $a(t)$ は scale factor) では座標変換により以下のように書ける。

$$\dot{\rho} - H\mathbf{x} \cdot \nabla \rho + \frac{1}{a} \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{u}} - H\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{a} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{a} \nabla \phi - \frac{1}{a\rho} \nabla p \quad (3.5)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho a^2 \quad (3.6)$$

ここで ∇ は \mathbf{x} による微分、 $\dot{}$ は t による偏微分を表わす。また、 ρ は (\mathbf{x}, t) における密度、 $H = \dot{a}/a$ 、 p は圧力、 ϕ は重力ポテンシャル、 \mathbf{u} は速度 ($\equiv a\dot{\mathbf{x}}$) である。次に、密度がほぼ一様の宇宙初期の状態を考え、 $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(t) + \delta\rho(\mathbf{x}, t)$ として一次の摂動を調べる。速度場 \mathbf{u} は既に微小量である。密度コントラストとして $\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \delta\rho/\rho_0$ を定義すると、 $\delta \ll 1$ の場合、

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.7)$$

$$\dot{\mathbf{u}} + H\mathbf{u} = \frac{1}{a} \nabla \phi - \frac{c_S^2}{a} \nabla \delta \quad (3.8)$$

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho_0 \delta a^2 \quad (3.9)$$

となる。ここで c_S は音速であり、 $c_S^2 = (dp/d\rho)_0$ である。上式を δ のみの式に変形すると、

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G \rho_0 \delta + \frac{c_S^2}{a^2} \Delta \delta \quad (3.10)$$

となる。これを δ についての運動方程式とみなすと、宇宙膨張による第二項が摩擦項として効いていることに注意。つまり、曲率や宇宙項が効きだし、膨張率が相対的に大きくなると、揺らぎの成長を遅くする効果がある。従って、このような宇宙モデルでは、現在観測されているような構造を作るためには、high- z で既に構造を作っておかなければいけないということを意味する。

次に、摂動が平面波 $\delta \propto \exp(\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ として分散関係を導く。揺らぎが不安定、即ち成長するための条件は $\omega > 0$ である。代入すると、この条件は

$$k^2 < k_J^2 \equiv \frac{a^2}{c_S^2} 4\pi G \rho_0 = \frac{3}{2} \Omega H^2 \frac{a^2}{c_S^2} \quad (3.11)$$

あるいは

$$\lambda > \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_S}{G \rho_0 a^2}} \quad (3.12)$$

となる。ここで λ_J は Jeans 波長と呼ばれ、これより短いスケールの揺らぎは成長できない。この条件は自己重力が圧力勾配より強いことに相当する。

ここで、 λ_J が時間と共にどのように変化するかを見る。radiation dominant ($z \gtrsim 10^4$) では、 $c_S \simeq c/\sqrt{3}$ なので、 $\lambda_J \simeq L_H/\sqrt{3}$ となり、horizon 半径とほぼ等しくなる (L_H は comoving での horizon 半径)。つまり、horizon より小さなスケールの揺らぎは成長できない。

equal time から recombination までの間 ($10^3 \lesssim z \lesssim 10^4$) は、CDM は定義により $p \sim 0$ であるので、 $\lambda_J \sim 0$ となり、ほぼ全てのスケールで成長できる。しかし、baryon に関しては、エネルギーは非相対論的物質が支配しても、圧力は輻射が支配しているため、 $c_S^2 \propto a^{-1}$ となり、 $\lambda_J \propto a^{-1/2}/\dot{a} \simeq \text{const.}$ となる。

最後に、recombination 以降 ($z \lesssim 10^3$) を考える。baryon が感じる圧力は baryon 自身が生み出すので、 $p \propto \rho^{5/3}$ となり、音速は $c_J^2 \propto a^{-1}$ 、Jeans 波長は $\lambda_J \propto a^{-1/2}$ となる。

実際には、diffusion damping などの効果で、baryon の小スケールの揺らぎは慣らされるが、ここでは割愛する。

次に、equal time 以降の揺らぎが時間と共にどのように成長するかを調べる。時間発展の式 (3.10) に於いて $c_S = 0$ と置いたものが基本方程式となる。簡単のために E-dS 宇宙 ($\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 0$) を考えると、 $H = 2/3t$ であるから

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t} \dot{\delta} - \frac{2}{3t^2} \delta = 0 \quad (3.13)$$

となり、 $\delta \propto t^\alpha$ と置くと

$$\alpha = \frac{2}{3}, -1 \quad (3.14)$$

と二階微分方程式であることより二つの階が得られ、一般解が

$$\delta(t) = C_1 t^{2/3} + C_2 t^{-1} \quad (3.15)$$

と二つのモードの重ね合わせで書けることになる。ここで第一項が成長 (growing) モード、第二項が減衰 (decaying) モードである。以下では一般に growing モードを $D(t)$ と書く。E-dS の場合、scale factor で書くと $D \propto a$ となる。なお、super horizon scale の揺らぎは相対論的取り扱いによって $D \propto a^2$ となることがわかっている。

なお、一般に decaying mode は $\delta \propto H$ となる。従って、Wronskian を用いて growing mode も求めることができる ($\Omega_\Lambda = 0$ の場合は解析解がある)。

次に速度揺らぎについて調べる。連続の式 (3.7) と Poisson 方程式 (3.9)、及び線型段階での密度揺らぎが $\dot{\delta} = (\dot{D}/D)\delta$ と書けることから、

$$\mathbf{u} = -\frac{fH}{4\pi G\rho_0 a} \nabla\phi \quad (3.16)$$

となる。ここで

$$f \equiv \frac{\dot{D} a}{D \dot{a}} \simeq \Omega^{0.6} \quad (3.17)$$

は growth factor と呼ばれる。これは、 δ と \mathbf{u} が観測から求まれば、 Ω_0 が決まることを示している。これは渦度が 0 の場合に成り立つが、渦度は decaying mode しかなく、線型段階では成り立っていると考えて良い。

3.2 非線型領域

$\delta \sim 1$ となると、もはや線型近似は使えず、非線型効果を考慮して計算をしなければならない。Euler 座標での逐次近似で δ の高次の項を求める方法はあるが、 $\delta < 1$ でしか原理的に使えず、実際には δ がかなり小さくてもすぐに破綻してしまう。

N -body simulation をやってみると、次の図のように線型と非線型の揺らぎが対応がつくことが知られている (但し、図は個々の揺らぎではなく分散になっている)。

一方、Lagrange 座標での近似、即ち流体素片の運動を追いかける近似はかなり良い結果を与えることが知られている。First order は Zel'dovich 近似として知られ、流体素片の位置 r は、その Lagrange 座標での位置 q と

$$\mathbf{r} = a(\mathbf{q} + D\nabla\varphi) \quad (3.18)$$

のように、potential φ で書ける。固有速度は

$$\mathbf{u} = a\dot{\mathbf{x}} = a\dot{D}\nabla\varphi \quad (3.19)$$

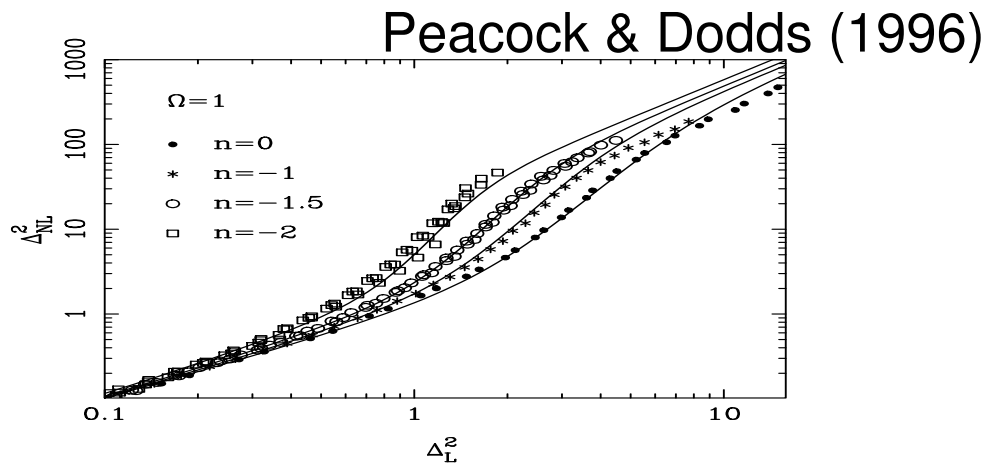
であり、式 (3.16) を用いると

$$\frac{\dot{D}}{D}\delta + \frac{1}{a}\nabla\mathbf{u} = 0, \quad (3.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = a\dot{D}\Delta\varphi, \quad (3.21)$$

$$\rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\delta}{D} \quad (3.22)$$

揺らぎ²



線型揺らぎ²

図 3:

となる。

なおこれは1次元シート重力系の exact 解になっており、膨張宇宙では収縮する領域の非等方性がますます強まるという性質を反映して良い近似になっていると考えられる。

ただし、これも DM 粒子のすり抜け (orbit crossing, shell crossing) が起こると破綻する近似である。

ここで Zel'dovich 近似を用いた天体の崩壊を議論しておく。一様流体 (Lagrange 座標 q) から崩壊するので、質量保存より

$$\rho d^3x = \bar{\rho} d^3q \quad (3.23)$$

が成り立つ。従って、密度の発展は

$$\rho = \left| \frac{d^3x}{d^3q} \right|^{-1} \bar{\rho} \equiv J^{-1} \bar{\rho} \quad (3.24)$$

で与えられる。この Jacobian J は、Zel'dovich 近似を使えば

$$J = \prod_{i=1}^3 (1 - D\lambda_i) \quad (3.25)$$

となる。ここで $(1 - D\lambda_i)$ は J の固有値である。つまり、 D が大きくなるに従って、固有値の大きい順、即ち初期により潰れている方向に先に崩壊することになる。これは、膨張宇宙に於ける構造形成は、まづシートの collapse し、次にフィラメント状になり、やがてノットのようになるということを示唆している。

3.3 球対称解

天体形成に至る非線型段階を記述するモデルとして、球対称に分布した揺らぎ (質量 M 、半径 r) に対する解がある。運動方程式は、単純に

$$\ddot{r} = -\frac{GM(\leq r)}{r^2} \quad (3.26)$$

であり、これがサイクロイド曲線

$$r = \frac{GM(\leq r)}{C} (1 - \cos \theta) \quad (3.27)$$

$$t = \frac{GM(\leq r)}{C^{3/2}} (\theta - \sin \theta) \quad (3.28)$$

を描くことは良く知られている (ただし、宇宙項が存在すると斥力項がつく)。従って、揺らぎの発展は、shell 内の平均密度が $\bar{\rho}(\leq r) = 3M/4\pi r^3$ となることから求めることができる。初期 ($\theta \ll 1$) の時、 θ で展開すると、

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{1}{6\pi G t^2} \left[1 + \frac{3C}{20} \left(\frac{6t}{GM} \right)^{2/3} + \dots \right] \quad (3.29)$$

となる。いま、E-dS 宇宙を考えると、平均密度は

$$\bar{\rho} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (3.30)$$

線型揺らぎは $\delta_L \propto D \propto t^{2/3}$ なので、上の球対称解は

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta_L + \dots) \quad (3.31)$$

とみなすことができる。

やがて、球殻内の自己重力により、球殻は宇宙膨張から切離されて収縮をはじめ。 $\theta = \pi$ の時に r は最大になるが、これを maximum expansion、この時期を turn around などと呼ぶ。この時の密度は、宇宙の平均密度に対して

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = 6\pi G t^2 \cdot \frac{3\pi}{32G t^2} = \frac{9\pi^2}{16} \simeq 5.5 \quad (3.32)$$

であり、この時刻での線型揺らぎは

$$\delta_{L,ta} = \frac{3C}{20} \left(\frac{6t_{ta}}{GM} \right)^{2/3} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \simeq 1.05 \equiv \delta_{ta} \quad (3.33)$$

となる。つまり、ある時刻 z_0 で揺らぎ $\delta_0 (\ll 1)$ を持つ領域は、線型揺らぎが $\delta_L \propto D \propto 1/(1+z)$ であることから、 $\delta_{ta} = \delta_0 D_{ta}/D_0$ より

$$1 + z_{ta} = \frac{\delta_0}{\delta_{ta}} (1 + z_0) \quad (3.34)$$

となる z_{ta} の時に最大膨張を迎えることになる。

さらに r が再び 0 になる時点を collapse と定義すると ($\theta = 2\pi$)、同様にしてその時刻での線型揺らぎが

$$\delta_{L,c} = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} \simeq 1.69 \quad (3.35)$$

となるのがわかる。この時、実際の密度は形式的には発散するが、物理的に考えると速やかに virial 平衡に達するであろう。この時の半径 r_c を求めよう。ここで、Energy 保存を考慮し、turn around 時 (速度 0) と、collapse 後 (virial 平衡) を結びと、

$$\frac{GM^2}{r_{ta}} = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{r_c} \quad (3.36)$$

となる。つまり、collapse 後の virial 半径 r_c は、最大膨張時の半径 r_{ta} の半分であることがわかる。この時の平均密度に対する密度比は、 $\rho_c = 2^3 \rho_{ta}$ 、 $t_c = 2t_{ta}$ を考慮すると、

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = 18\pi^2 \simeq 178 \quad (3.37)$$

となる。従って、collapse 直後の天体の内部の平均密度は、その時刻での宇宙の平均密度のおよそ 200 倍であることがわかる。

以上を用いると、揺らぎの amplitude を、現在まで線型成長を続けているとして normalize すると、ある点での揺らぎの大きさと、その点が collapse する時刻 z_c との間には、 $\delta = \delta_c(1+z_c)$ という関係のあることがわかる (詳細は後述)。つまり、初期の揺らぎの分布を見れば、ある時刻でどれくらいの領域が collapse しているか、mapping することが可能になる。

3.4 揺らぎの持つ角運動量の成長

領域 Γ が collapse するとして、この領域の持つ角運動量がどうなるかを調べよう。角運動量 L は、定義により

$$L(t) = \int_{\Gamma} (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}) \times \mathbf{u} \rho d^3 r \quad (3.38)$$

ここで質量保存 $\rho d^3x = \bar{\rho} d^3q$ 、 $\mathbf{u} = a\dot{\mathbf{x}}$ 、 $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$ を使うと

$$L(t) = \bar{\rho} a^5 \int_{\Gamma} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \times \dot{\mathbf{x}} d^3q \quad (3.39)$$

となる。Zel'dovich 近似を用いると、

$$L(t) = \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \times \nabla \varphi d^3q \quad (3.40)$$

である。ここで

$$\bar{\mathbf{q}} = \Gamma^{-1} \int_{\Gamma} \mathbf{q} d^3q \quad (3.41)$$

である。これより領域の非球対称性が重要であることがわかる。

次に、potential φ を $\bar{\mathbf{q}}$ のまわりに展開する。

$$\varphi(\mathbf{q}) = \varphi(\bar{\mathbf{q}}) + (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \cdot \nabla \varphi|_{\bar{\mathbf{q}}} + \dots \quad (3.42)$$

これを式 (3.40) に代入すると、

$$L(t) = \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} \epsilon_{ijk} (q_j - \bar{q}_j) (q_l - \bar{q}_l) \partial_k \partial_l \varphi(\bar{\mathbf{q}}) \quad (3.43)$$

となる。 ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである。ここで potential の微分の項を

$$\mathcal{D}_{kl} \equiv \partial_k \partial_l \varphi(\bar{\mathbf{q}}), \quad (3.44)$$

inertial tensor を

$$\mathcal{I}_{jl} \equiv \bar{\rho} a^3 \int_{\Gamma} (q_j - \bar{q}_j) (q_l - \bar{q}_l) \quad (3.45)$$

とすると

$$L(t) = a^2 \dot{D} \epsilon_{ijk} \mathcal{D}_{kl} \mathcal{I}_{jl} \quad (3.46)$$

となり、時間に依存する項を見ると、E-dS 宇宙では

$$L(t) \propto a^2 \dot{D} \propto t \quad (3.47)$$

と時間の一次に比例して増大することになる。実際には、maximum expansion のあたりで角運動量の獲得は止まり、あとは保存して collapse することになる。つまり

$$\delta = D_{ta} \Delta \varphi = \delta_{ta} \simeq 1.05 \quad (3.48)$$

となるところまで成長する。

inertia tensor を見ると、次元的に $\mathcal{I} \sim MR^2$ であり、上の式と合わせて、これは $M^{5/3}/D_{ta} \propto M^{5/3} t_{ta}^{-2/3}$ に比例する。これより、maximum expansion での、即ち最終的にハローが獲得する角運動量は

$$L_f \propto M^{5/3} t_{ta}^{1/3} \quad (3.49)$$

となる。

通常、角運動量を議論する際は、無次元の spin parameter λ を用いる。これは、

$$\lambda \equiv \frac{L|E_{\text{tot}}|^{1/2}}{GM^{5/2}} \quad (3.50)$$

で定義される。角運動量が 0 なら 0、完全に rotation support になっていれば $\simeq 1$ となる。図 4 に、Catelan & Theuns による λ の分布を示す。詳細は略すが、これは初期に Gauss 分布する揺らぎの場を考え、揺らぎのピークになる点のまわりの角運動量の分布がどうなるかを計算したものである。パラメータになっている ν は揺らぎの高さの尺度で、揺らぎの偏差を σ の何倍かを示す ($\nu = \delta/\sigma$)。 ν が大きいほど早く collapse するので、それだけ獲得する角運動量も小さいということになる。

いづれの ν にしても、 $\lambda \lesssim 0.1$ がほとんどを占めている。つまり、ダークハローはほとんど回転していないということを示している。ただし、これが銀河になる際には内部のガスがエネルギーを失って収縮するため、結果的には $\lambda \simeq 1$ となる。

この分布は、いわゆる log-normal 分布で良く fit される。

$$p(\lambda)d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda} \exp\left[-\frac{(\ln \lambda - \ln \bar{\lambda})^2}{2\sigma_\lambda^2}\right] d\ln \lambda, \quad (3.51)$$

ここで $\bar{\lambda}$ は平均の λ 、 σ_λ は $\log \lambda$ の分散である。大体 $\bar{\lambda} = 0.05$ 、 $\sigma_\lambda = 0.5$ となる。

4 密度揺らぎの統計的性質

4.1 Gauss 分布

密度揺らぎ δ は、 $\delta \ll 1$ の時代には通常 random Gaussian 揺らぎであると仮定される。揺らぎの分散を $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$ と置くと、一点分布関数は

$$f(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta \quad (4.1)$$

となる。ここで σ^2 は揺らぎの分散であり、 $\sigma^2 \equiv \langle \delta^2 \rangle$ である。 δ の Fourier 変換は、

$$\delta_{\mathbf{k}} \equiv |\delta_{\mathbf{k}}|e^{i\phi_{\mathbf{k}}} = \int \delta(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

であり、 $\phi_{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} 成分の位相である。random Gaussian 揺らぎは位相に相関がなく、

$$\langle \phi_{\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{k}'} \rangle \propto \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \quad (4.3)$$

である。amplitude の自乗平均は、power spectrum と呼ばれ、

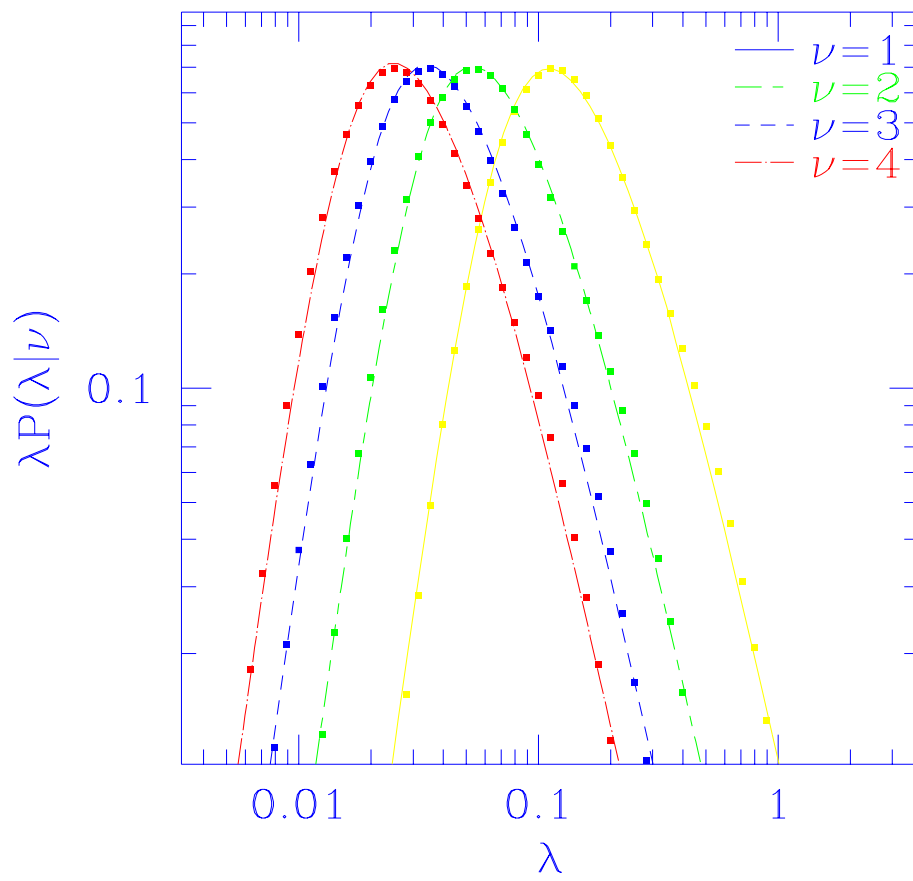
$$P(k) \equiv \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \quad (4.4)$$

で定義される。ここで $\langle \rangle$ は ensemble 平均を表し、また一様等方性より $P(\mathbf{k}) = P(k)$ とした。重要な関係として、二体相関関数 $\xi(r) \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ と

$$P(k) = \int \xi(r)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.5)$$

という Fourier 変換の関係にある。また、Gaussian random field の特徴として、 $P(k)$ 或いは $\xi(r)$ によって、一意的に分布が定まる。

次に、power spectrum の時間進化を見よう。通常、inflation 直後に生成される揺らぎは $P(k) \propto k$ と仮定され、Harrison-Zel'dovich spectrum と呼ばれる。 $t < t_{\text{eq}}$ では horizon より大きい揺らぎは a^2 に比例して成長し、horizon 内の揺らぎは成長しない。一方、 $t > t_{\text{eq}}$ の揺らぎは、どのスケー



⊠ 4:

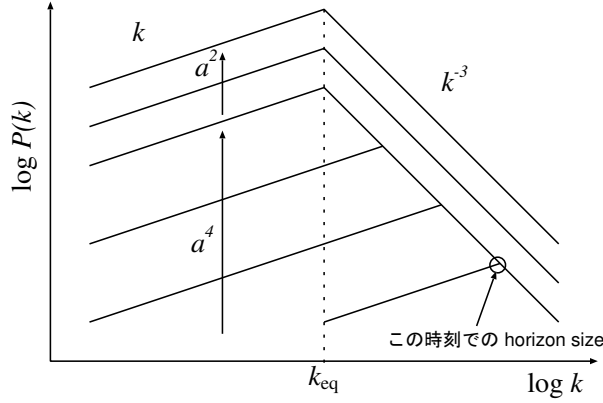


図 5:

ルでも一様に成長する。従って、その様子を図に描くと、FIG.5 のようになる。なお、分散に直すと、 $\sigma^2 \simeq \int P(k) d^3k \simeq k^3 P(k)$ であるから、短波長側 ($k > k_{\text{eq}}$) では $\sigma \sim \text{const.}$ となる。ただし、実際には完全に成長が止まるわけではなく、log 的な成長があるため、完全に一定値になるわけではない。

詳細な計算では、power spectrum を initial (Harrison-Zel'dovich) とそこからの変形 (transfer function) に分けて、

$$T(k) = \frac{\ln(1 + 2.34q)}{2.34q} [1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4]^{-1/4}, \quad (4.6)$$

ここで

$$q = \frac{k}{\Omega_0 h^2 \text{Mpc}^{-1}}, \quad (4.7)$$

得られる power spectrum は

$$P(k, t_f) \propto T^2(k) P(k, t_i) \quad (4.8)$$

となる。ここで

$$P(k, t_i) \propto k^n \quad (4.9)$$

であり、 $n = 1$ なら Harrison-Zel'dovich spectrum である。

4.2 二体相関関数

揺らぎの二体相関関数は

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (4.10)$$

で定義される。ここで等方性より $\xi(\mathbf{r}) = \xi(r)$ とした。これは距離 r 離れた点での揺らぎの値がどれだけ相関しているかを示す量である。この δ を Fourier 変換すると、

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k \quad (4.11)$$

となり、 ξ が power spectrum $P(k) = \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ の Fourier 変換になっていることがわかる。

ここで $P(k) \propto k^n$ と置くと、

$$\xi(r) \sim k^{n+3} \sim r^{-n-3} \quad (4.12)$$

となる。観測された銀河分布では、 $\xi(r) \simeq (r/5h^{-1}\text{Mpc})^{-1.8}$ となることが知られている。従って、もし銀河と dark matter の分布が同じならば、このスケールで、 $n \simeq -1.2$ 程度になっていなければならない。これは CDM の予想とは大体一致する。

実際には、銀河と dark matter の分布は同じではない。それぞれの二体相関関数を ξ_{gg}, ξ_{mm} と書き、

$$\xi_{gg} = b^2 \xi_{mm} \quad (4.13)$$

と置く。この b は bias parameter と呼ばれる。 b は原理的にはスケール、時間に依存するが、簡単に定数とすることが多い。

ここで ξ が 1 になるスケールを考える。つまり、 $\xi(r) = (r/r_0)^{-\gamma}$ と置いた場合の r_0 である。これは ξ の amplitude の指標になっている。dark matter を考えると、線型 (で E-dS) の場合、 $\xi \propto a^2$ であるから、

$$r_0 \propto a^{\gamma/2} \quad (4.14)$$

となる。そこで、実際に観測される銀河の相関関数の r_0 が z と共にどう進化するかを見れば、これは銀河形成を理解するためのよい指標になる。high- z での相関関数はまだ観測がはじまったばかりであるが、観測は予想される dark matter の r_0 よりも大きい値を示唆している。 N -body simulation と準解析的モデルの組み合わせによる解析では、 z が大きくなるにつれて bias が大きくなる傾向が見られる (図 9)。

4.3 天体の個数密度

ここでは球対称解と揺らぎの Gaussian 分布から、質量 M の天体の個数密度 $n(M)dM$ を見積る Press-Schechter 近似を紹介する [?]。まづ、揺らぎを質量 M のスケール ($R \simeq [3M/4\pi\rho_0]^{1/3}$) で均す。均された場で $\delta_M = \delta_c$ となった点が、質量 M の天体になると考える。

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.15)$$

$$= \int \tilde{W}(kR) \delta_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (4.16)$$

ここで W_M は均すための window 関数であり、 \tilde{W} はその Fourier 成分である。window 関数の形としては、top-hat 型や Gaussian 型がよく用いられるが、計算が簡単になるため Fourier 空間での top-hat 型である sharp k -space filter もよく用いられる。スケール M での揺らぎの分散は、

$$\sigma^2(M) \equiv \langle \delta_M^2 \rangle = \int \tilde{W}^2(kR) P(k) d^3k \quad (4.17)$$

となるが、window 関数に入っている cut-off のスケールを $k_c \simeq 2\pi/R$ とすると、

$$\sigma^2(M) \simeq k_c^3 P(k_c) \propto k_c^{3+n} \propto M^{-\frac{3+n}{3}} \quad (4.18)$$

となる。ここで、 $P(k) \propto k^n$ とおいた。CDM モデルでは $n \gtrsim -3$ となる。

さて、 M の場で collapse している領域は $\delta_M \geq \delta_c$ であるので、その割合は

$$F(M) = 2 \int_{\delta_c}^{\infty} f(\delta; \sigma_M) d\delta \quad (4.19)$$

SDSS 三次元データによる相関関数

赤方偏移空間であることに注意

Zehavi et al. (2002)

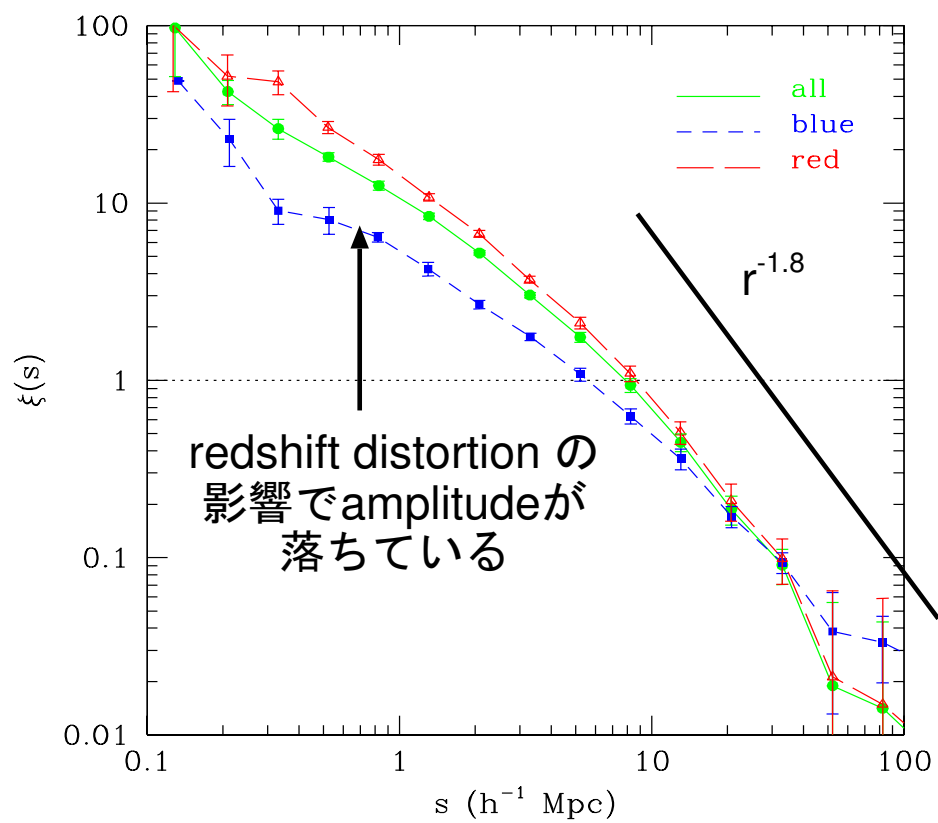


図 6:

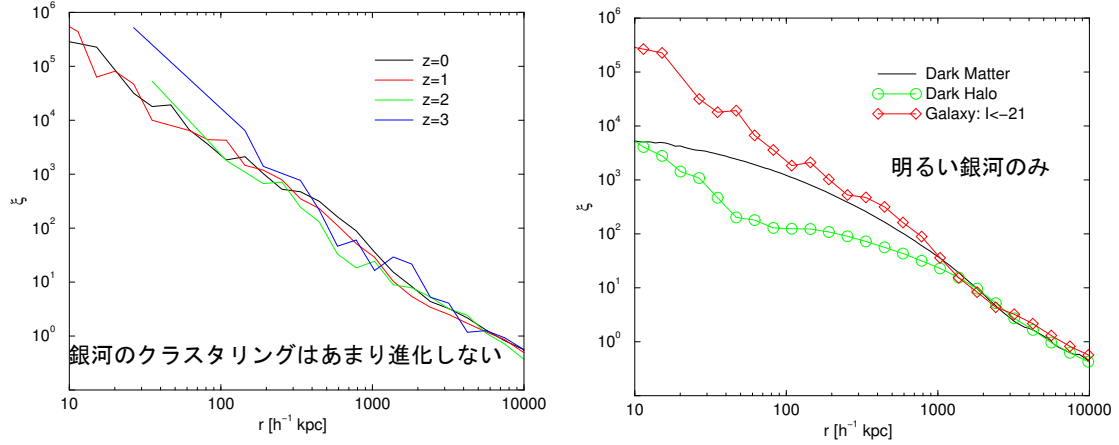


図 7:

と書ける。ここで factor 2 は、 $\delta < 0$ の領域も含めて全領域を考慮するためにつけられている。この領域が質量 M 以上の天体に含まれているので、

$$F(M) = \int_M^\infty \frac{M' n(M')}{\rho_0} dM' \quad (4.20)$$

と関係づけられる。質量 M の天体の個数密度は、 M 以上の天体になっている領域から $M + dM$ 以上の天体になっている領域を引いたものを、一つの M の天体が占める領域 M/ρ_0 で割ったものに等しいから、

$$n(M) = -\frac{\rho_0}{M} \frac{dF(M)}{dM} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_0 \delta_c}{M^2 \sigma_M} \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}} \quad (4.21)$$

となる。これを Press-Schechter 質量関数と呼ぶが、 $n > -3$ の場合のみ適用可能であることに注意しなければならない。small mass scale では、 $n \propto M^{-2} \sigma^{-1} \propto M^{n-9} \delta_c \sim M^{-2}$ となる。

4.4 ハローバイアス

詳細な導出は他に譲り、ここでは定性的な意味のみを述べる。

既に示したように、天体となるような構造は、初期に高密度であった領域のみに形成される。特に high- z ではかなり稀な高密度領域のみで天体が形成されるため、天体の分布は dark matter の分布とはかなり異なると予想される。

高密度揺らぎのピークに銀河ができると考えよう。high- z では大質量天体は $\nu (= \delta/\sigma)$ が大きい領域に形成される。このような領域は非常に稀であり、長波長の揺らぎのモードによるかさ上げのある領域で形成されやすい。従って、この時期での δ_c を越える領域のみを切り出すと、強くクラスタリングしていることが予想される。そのため dark matter の分布に対するハロー分布のバイアスが非常に大きく出ることになる。low- z に行くに従い、低密度領域でも天体が形成され出すので、バイアスは小さくなる。

観測される銀河の性質を考えると、large ν の領域は早く collapse することから古い楕円銀河が多く、あとから collapse する領域では青い spiral が多いと考えられる。従って、色や形態による選別を行い相関関数を調べると、ここでもバイアスがあることがわかる。

先の図での $r_0 - z$ 関係は、基本的にはこのようにして理解される。

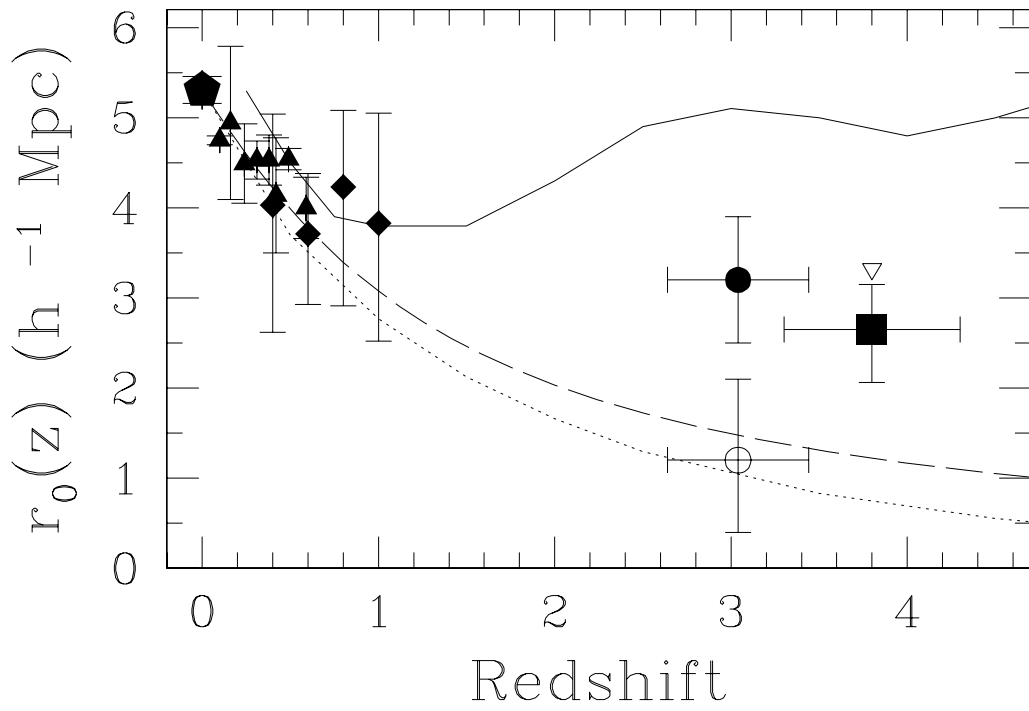
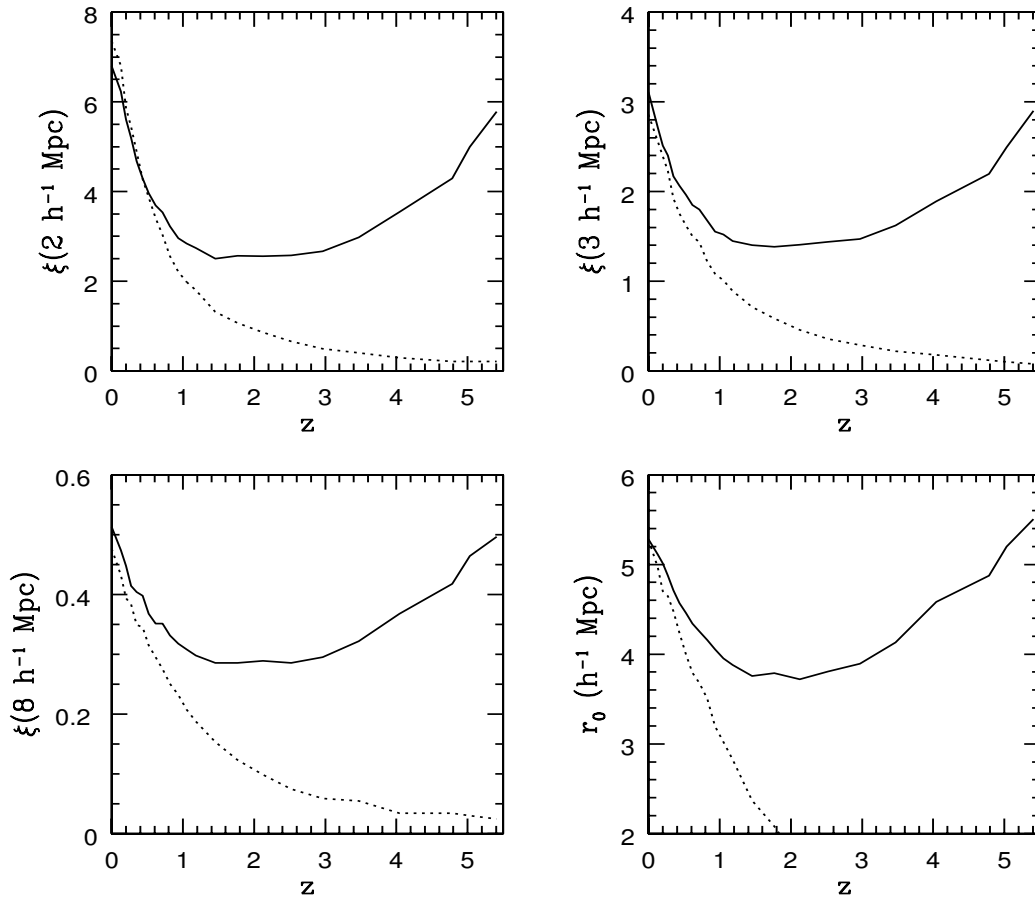


Figure 8: Ouchi et al. (2001)

Kauffmann et al. (1999)



☒ 9:

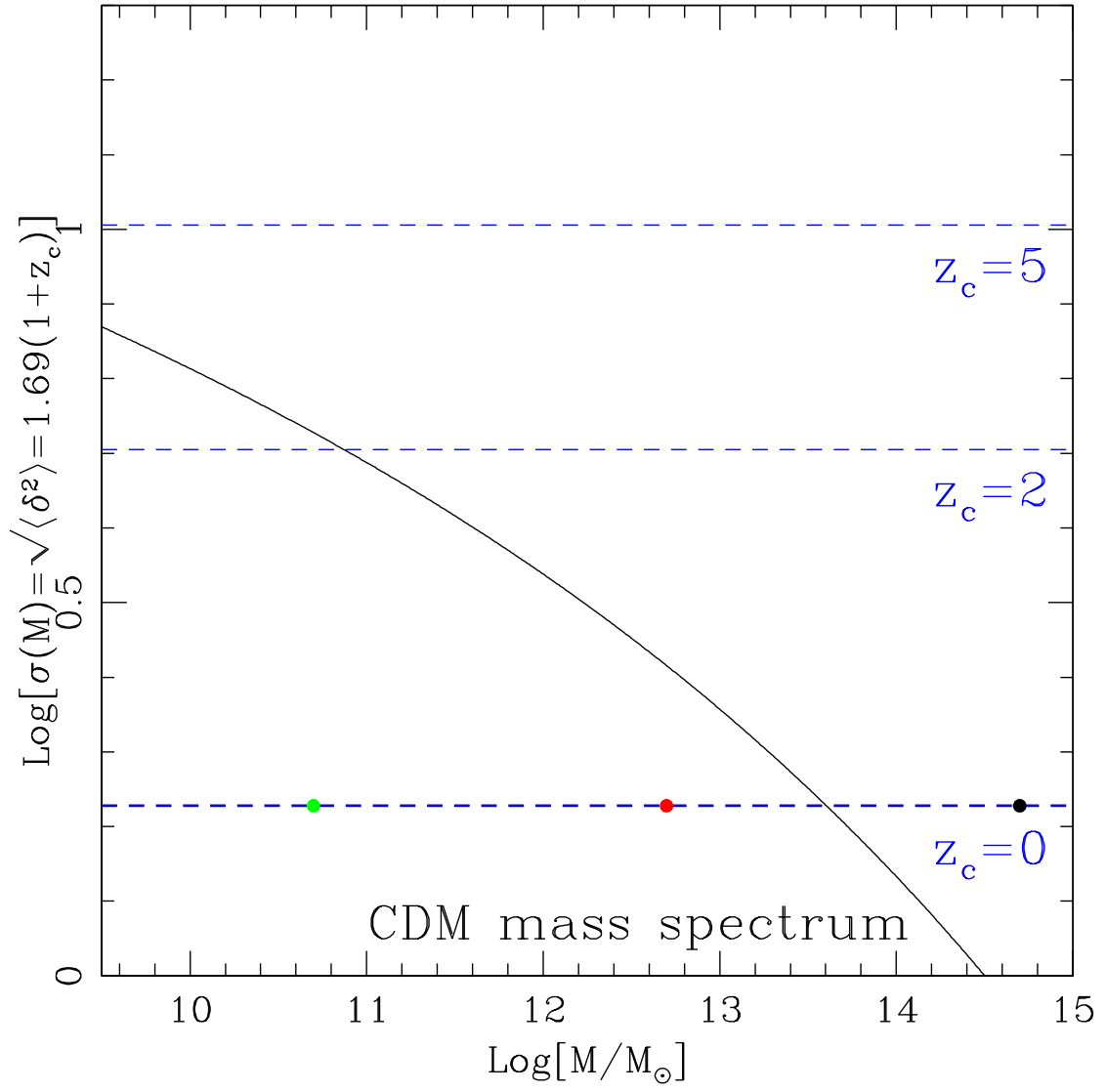


Figure 10:

5 銀河形成

5.1 考慮すべき物理過程

今までは dark matter の分布がどのように進化するかを調べてきた。そこでは相互作用としては重力のみを考えればよく、その下で揺らぎや角運動量の性質を考えれば良かった。しかし、銀河の形成過程には様々な物理過程が重要になる。最低限考慮しなければならない物理過程として、

- ガスの冷却
collapse した dark halo 中のガスは、その virial 温度程度にまで加熱されているが、その内部エネルギーを輻射によって散逸させ、halo 中心部に沈殿することで高密度領域を作り、やがて星形成に至る。従っていつごろどのようなサイズの halo が collapse すると、どれだけガスが冷却できるかを調べることは重要である。
- 星形成
冷えたガスがどのようにして星になるかはよくわかっていない。以下では宇宙論的な構造形成を重視する立場から、とりあえず簡単に冷えたガスが適当な time-scale で星になると仮定する。
- 超新星爆発によるフィードバック (ガスの再加熱)
星ができれば短寿命の massive star は爆発し、一旦冷えたガスをまた加熱する。これによってさらなる星形成を阻害する。どれくらいの量のガスを加熱するかは重力ポテンシャルに依存していると考えられるため、dwarf 銀河程度のスケールでは強いフィードバックによって大量のガスが掃き出され、dwarf 銀河を減らすと考えられる。
- 銀河同士の合体
dark halo は順次合体し成長していくが、halo 中の銀河は dark halo が合体してもただちに合体するわけではない。dynamical friction の time-scale で中心に落ち込み、やがて中心の銀河と合体する。さらに一つの halo 中に銀河が多いと、random に衝突する確率も増えることになる。

さらに観測と比較するためには種族合成の手法を用いて個々の銀河からどれくらいの光度が放出されているかも計算する必要がある。

5.2 ガスの冷却

dark halo が collapse すると、その重力エネルギーは衝撃波により内部のガスを加熱する。重力エネルギーが解放されるので、ガスの温度は大体 virial 温度程度になると考えられる。

$$kT_{gas} \simeq kT_{vir} \simeq \frac{GMm_p}{r} \quad (5.1)$$

銀河より大きなスケールでは、大体 $T > 10^{4-5} \text{K}$ くらいになり、銀河団スケールでは 10^7K (1keV) 程度になる。

輻射機構を考えると、 10^{4-5}K では水素原子の line cooling、即ち衝突により電子の準位がたたき上げられ、その後自発的に準位を下げる際に光子を放出することでエネルギーを散逸させる機構が重要になる。一方、 10^7 程度では、baryon はほぼ完全にイオン化しており、電子による制動輻射 (bremsstrahlung) が重要になる。

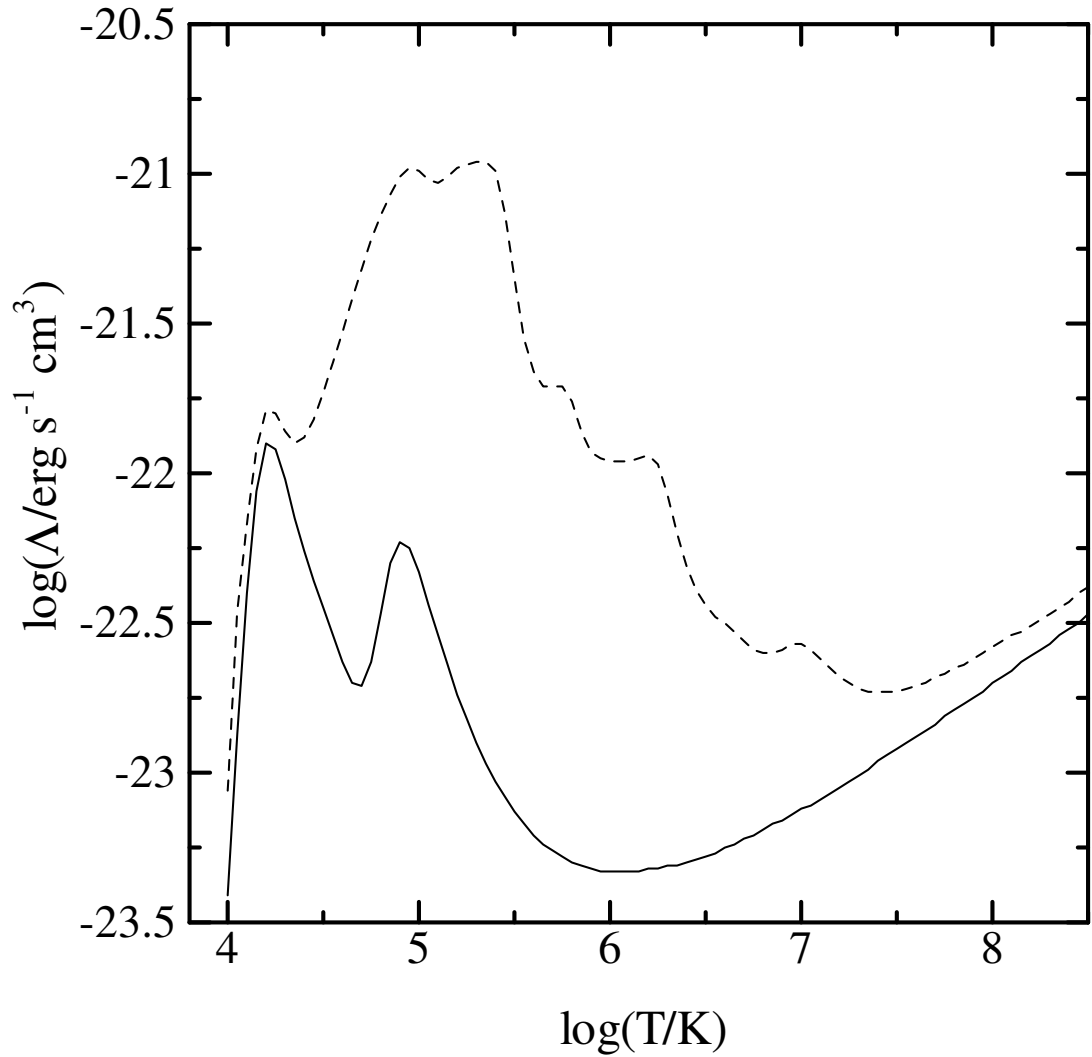


図 11: Sutherland & Dopita (1993)

エネルギー散逸率を普通 cooling function と呼び、 Λ で表す。これは温度と重元素量の関数になっている。実際の散逸率はガスの個数密度 n を用いて $n\Lambda$ となる。

ここで halo 中のガスの冷却の time-scale を見積ってみる。これは内部エネルギーがこの散逸率で散逸しきるのに要する time-scale なので、

$$t_{\text{cool}} \simeq \frac{kT}{n\Lambda} \quad (5.2)$$

となる。これと系の dynamical time-scale と比較する。dynamical time-scale は

$$t_{\text{dyn}} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (5.3)$$

である。もし、collapse した halo の状態が $t_{\text{cool}} \ll t_{\text{dyn}}$ ならば、内部の baryon は shock 加熱で生じた温度による圧力を感じることなく、dynamical time-scale で halo 中心部に落ち込んでいく。一方、逆の場合は、銀河団ガスのように圧力で支えられ、準静的にエネルギーを散逸していく。こ

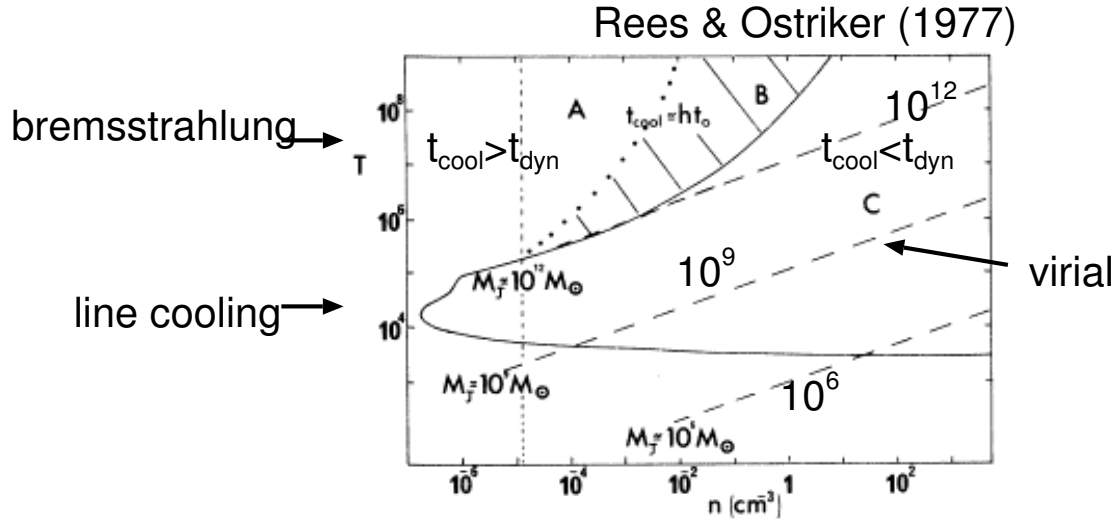


図 12:

の様子をプロットすると図 12 のようになり、典型的な銀河のスケールが冷却の効く範囲に納まっていることがわかる。

現実の宇宙では、 $z \gtrsim 2$ 程度では QSO からの UV 背景放射により、cooling が抑えられる可能性がある。ガスが多いと optical depth も大きいので shielding が効いて UV が浸透しにくくなるが、小さい halo では加熱がよく効き得る。従って、dwarf 銀河の形成を抑える可能性がある。

5.3 星形成

冷えたガスの質量を M_{cool} と置く。最も簡単な仮定は、これが適当な time-scale τ_* で星に変わるとすることである。この場合、星形成率 (SFR) は

$$\dot{M}_* = \frac{M_{\text{cool}}}{\tau_*} \quad (5.4)$$

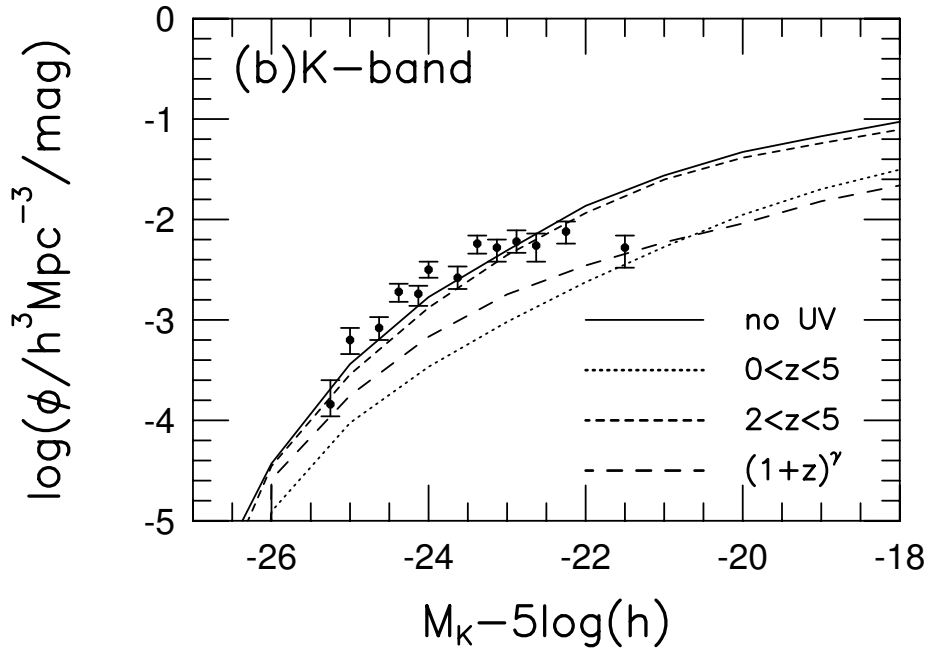
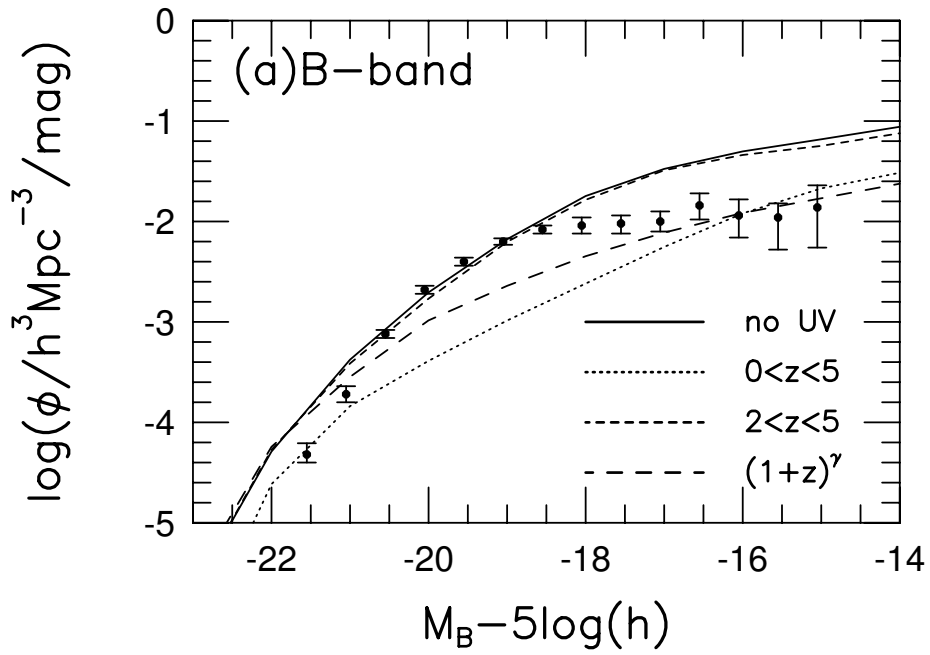
となる。単純に考えると、 $\tau_* \simeq t_{\text{dyn}}$ となりそうであるが、各種の計算は t_{dyn} の数十倍になっていることを示唆しているように見える。これは星形成の複雑な物理過程を単純にモデル化していることから生じる喰い違いと考えられる。

5.4 超新星爆発によるフィードバック

超新星の爆発率は、短寿命であることから星形成率に比例すると考えるのは良い近似である。halo の circular velocity が V_c の時のガスの reheating rate は単純な考察では

$$\dot{M}_{\text{reheat}} \simeq \epsilon \frac{\eta_{SN} E_{SN}}{V_c^2} \dot{M}_* \quad (5.5)$$

と書ける。ここで η_{SN} は IMF を仮定した時に形成される星 $1M_{\odot}$ あたりの超新星の個数の割合であり、Salpeter IMF 等でおおよそ $7 \times 10^{-3} M_{\odot}^{-1}$ 程度である。 E_{SN} は超新星一発あたりに放出されるエネルギーで、 10^{51} erg である。 ϵ は超新星から放出されるエネルギーが再加熱に使われる効率



☒ 13: Nagashima, Gouda & Sugiura (1999)

である。しかし、実際にどれくらいの効率で加熱がおこなわれるかを評価することは非常に難しい。超新星残骸の運動が銀河スケールで多重に起きている場合にどうなるか、残骸の冷却がどれくらい起きるのかを含めて考慮しなければならないからである。

5.5 銀河の合体

通常 dynamical friction による合体が考えられる。普通の公式では、その time-scale は

$$\tau_{\text{fric}} \simeq \frac{V_c^2 r_h^2}{GM_{\text{sat}} \ln \Lambda} \quad (5.6)$$

となる。ここで V_c, r_h は halo の circular velocity, radius であり、 M_{sat} は落ち込むサテライト銀河の質量である。 $\ln \Lambda$ はいわゆる Coulomb logarithm である。実際にはこれ以外にも角運動量や軌道要素、spin 間の相互作用などが絡むと考えられ、もっと複雑であると思われる。また、サテライトの質量も、dark matter 込みなのか、baryon のみなのかで結果が変わるが、それはサテライトが持つ dark matter が tidal stripping 等によってどれくらい剥ぎ取られるかを調べなければならない。

5.6 準解析的モデルによる銀河形成

ここで、一つの例として、いわゆる準解析的モデルによる銀河形成の解析を紹介する。これは、dark halo の clustering を Press-Schechter や N -body simulation によって求め、得られた dark halo の形成史の上で上記の物理過程を計算し、個々の銀河の特性を調べるものである。

以下、このモデルを用いた最近の結果について簡単に紹介する。

6 終わりに

銀河形成は宇宙に於ける構造形成を基礎に展開した理論が観測と直接比較可能な時代に入った。基礎となる大構造形成の理論は、基本的な枠組は既に完成し、業界のトレンドという意味ではもはや「終わった」分野であり、後は細かい問題しか残されていない(少なくとも理論的には)。しかし、銀河や銀河団形成を議論する際には大構造形成の理論は踏まえておく必要があるため、基本的な知識は身につけておかなければならない。無論、大構造を観測的に検証することは当面は重要である。

今日は、銀河形成に直接関わる基礎的な部分として、主に recombination ($z \simeq 10^3$) 以降での密度揺らぎの成長を調べた。また揺らぎの統計的な性質についても調べた。それらをもとに、銀河形成はどのように考えられるべきかについて述べた。銀河形成の物理に関してはまだわかっていないことが多いが、まづ現状のモデルの範囲で観測と丹念に比較を重ね、矛盾点を洗い出す作業が必要である。それと共に、パラメータでしか扱えていない、星形成やフィードバック等の物理についての理解も進めていくことが、今後重要になってくるであろう。

教科書

池内了「観測的宇宙論」、東京大学出版会

岡村定矩「銀河系と銀河宇宙」、東京大学出版会

小玉英雄「相対論的宇宙論」、丸善

富田憲二「一般相対論的宇宙論」、裳華房

須藤靖「ダークマターと銀河宇宙」、丸善

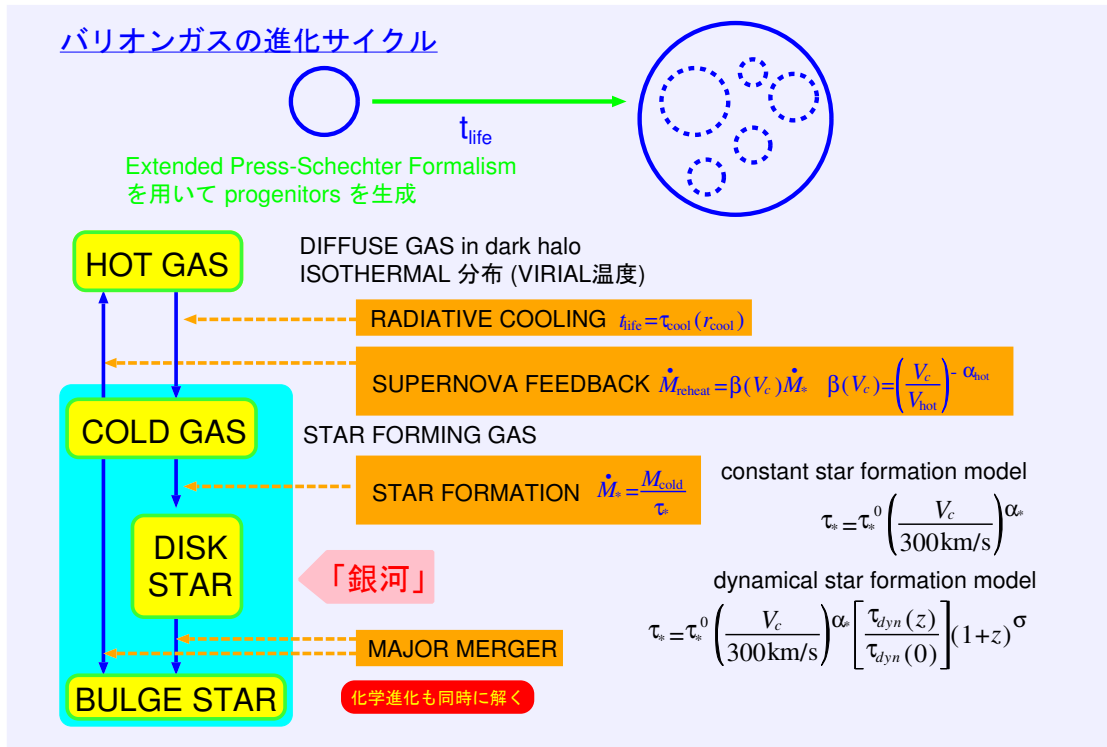


図 14: baryon 成分の進化

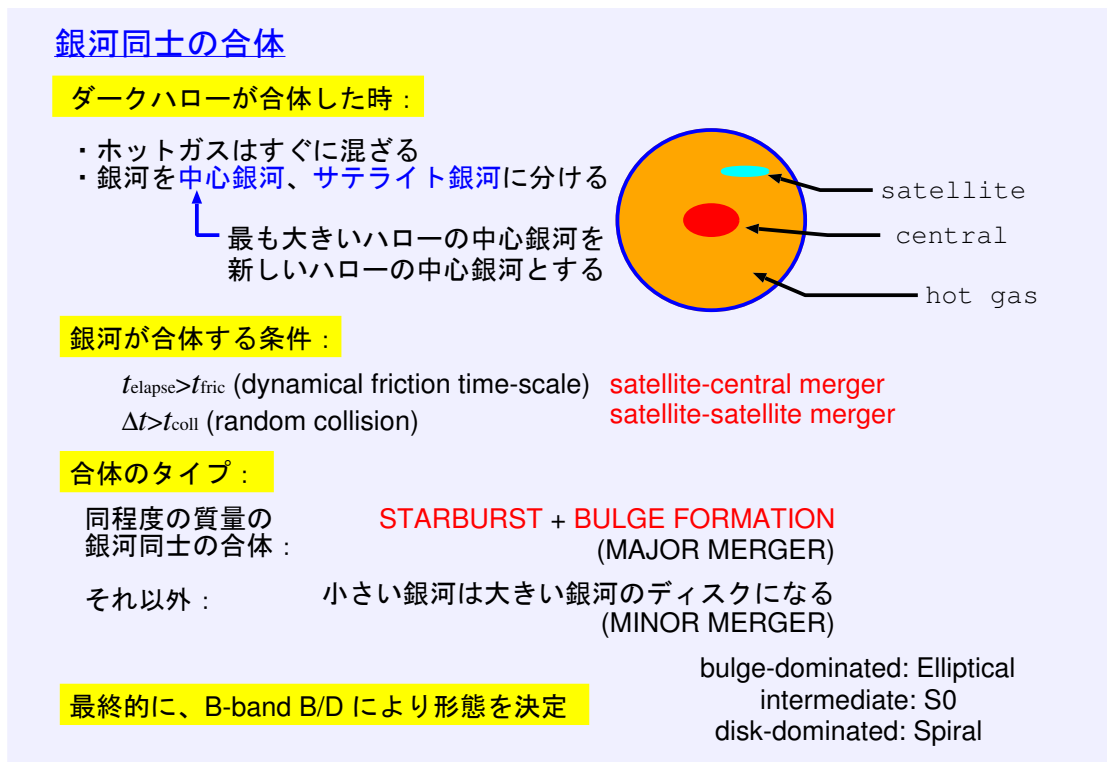


図 15: merger

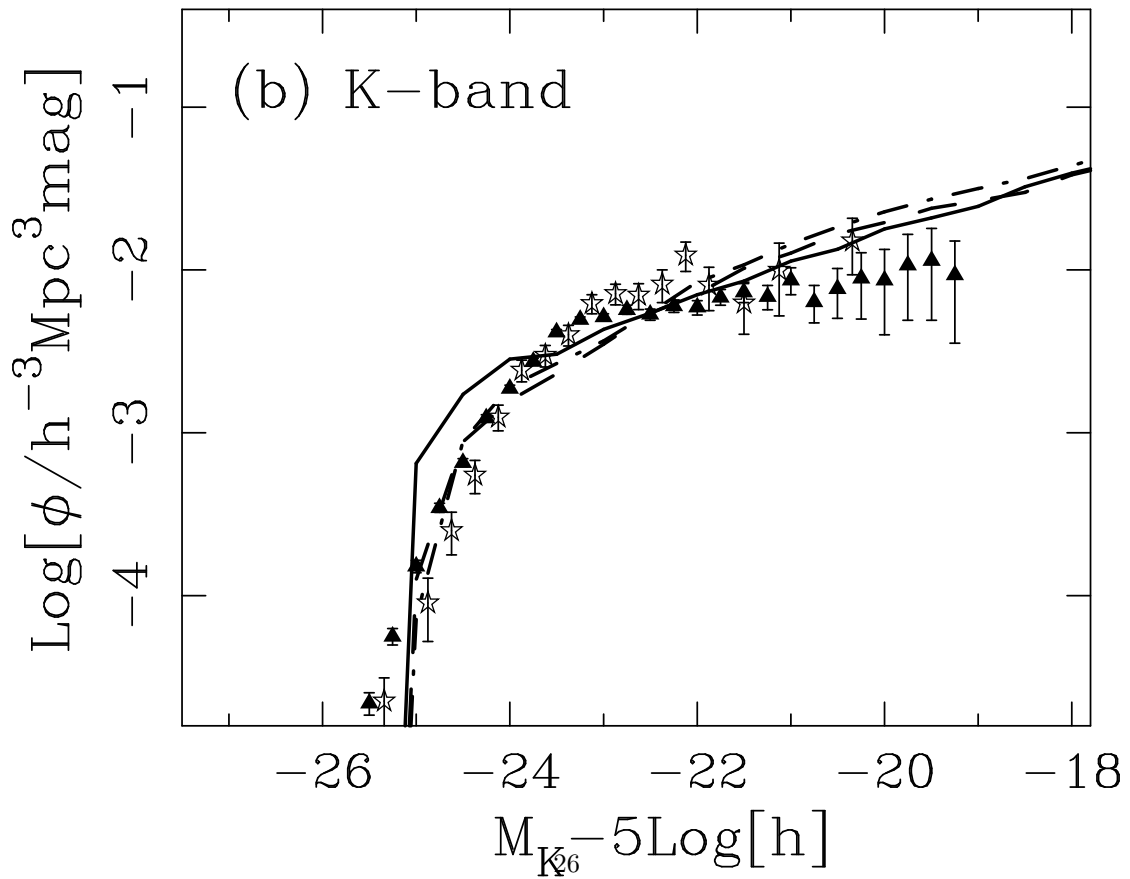
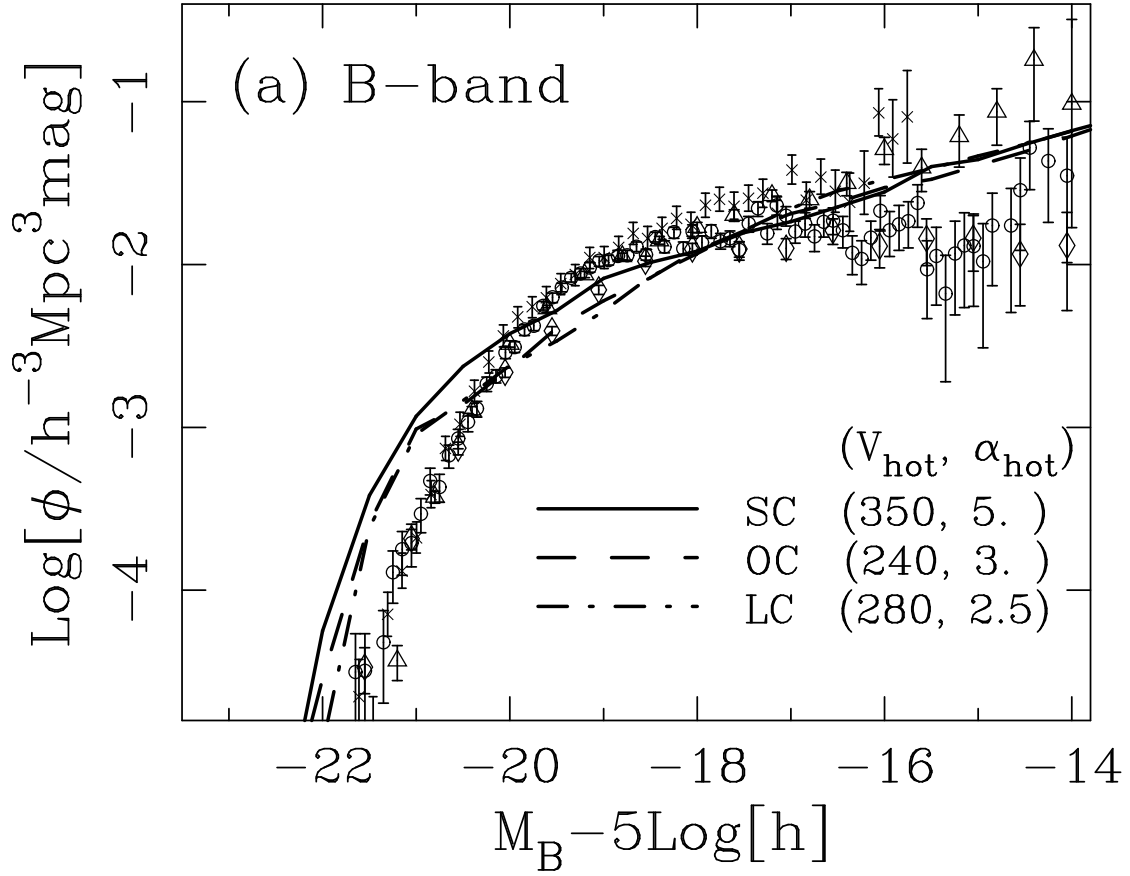
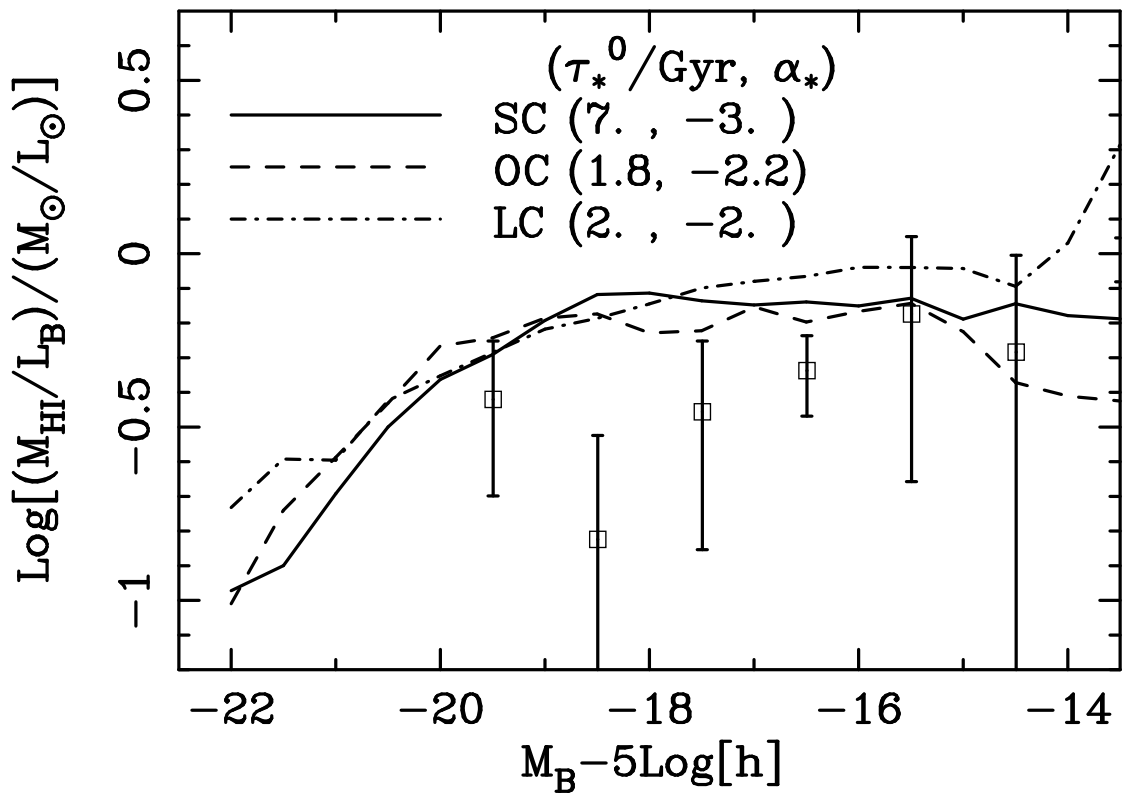
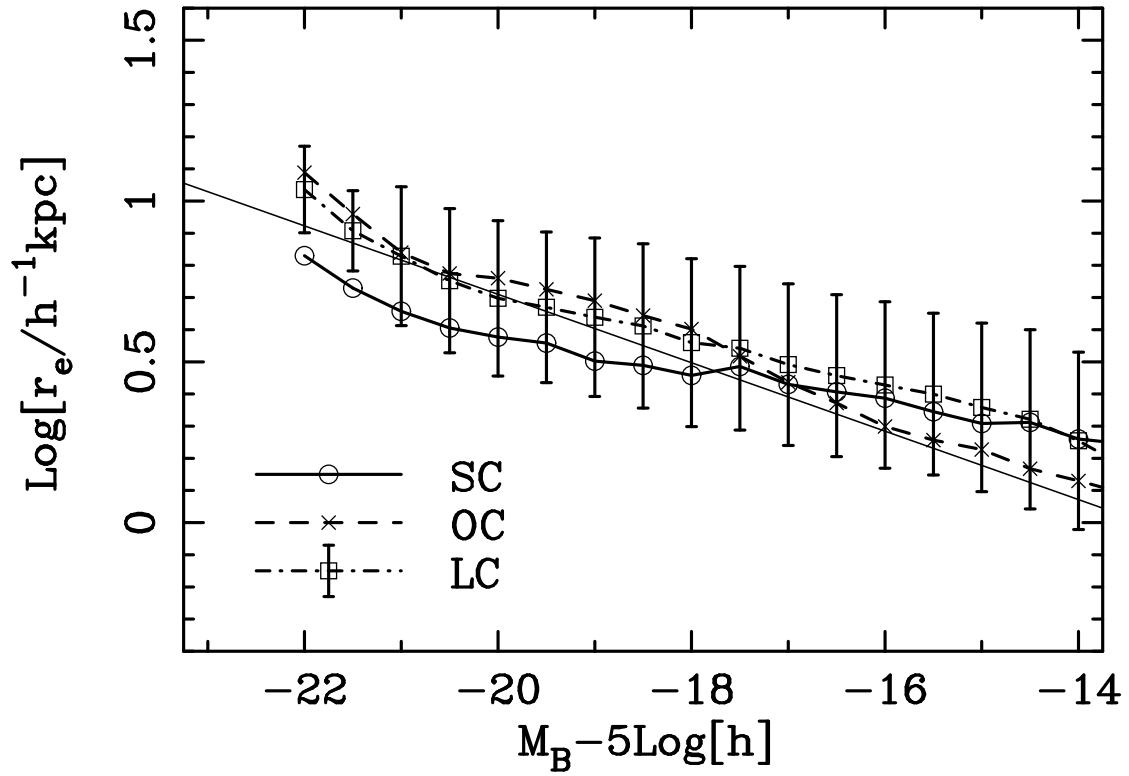


Figure 16: Luminosity functions (Nagashima et al. 2002)

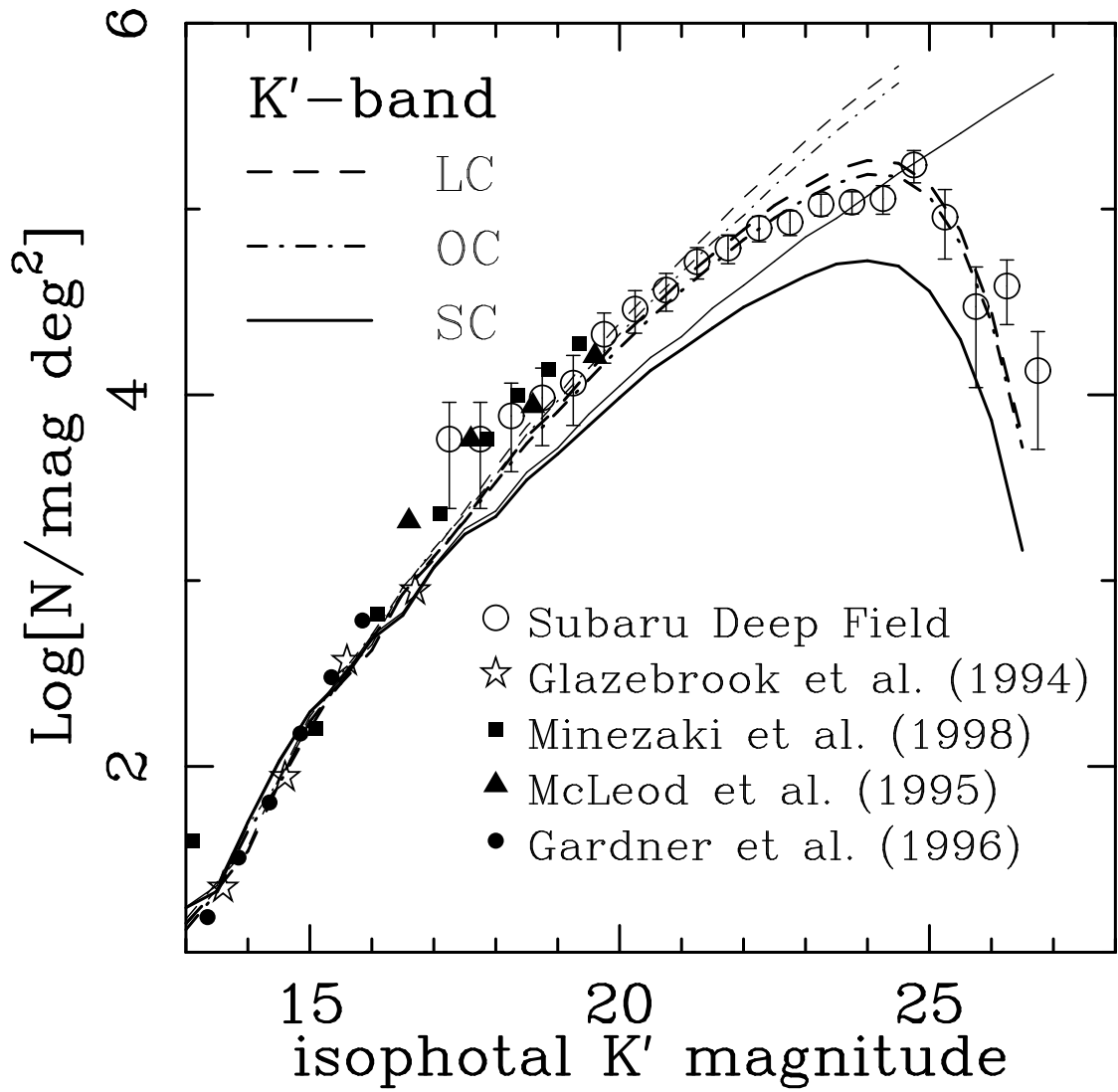


⊠ 17: Cold gas mass fraction (Nagashima et al. 2002)



☒ 18: Disk size (Nagashima et al. 2002)

Peebles, P.J.E., "Large-scale Structure of the Universe", Princeton Univ. Press
Peebles, P.J.E., "Principles of Physical Cosmology", Princeton Univ. Press
Padmanabhan, T., "Structure formation in the Universe", Cambridge Univ. Press
Peacock, J.A., "Cosmological Physics", Cambridge Univ. Press
Lucchin, Coles, P., "Cosmology",



☒ 19: K'' -band galaxy counts in Subaru Deep Field (Nagashima et al. 2002)

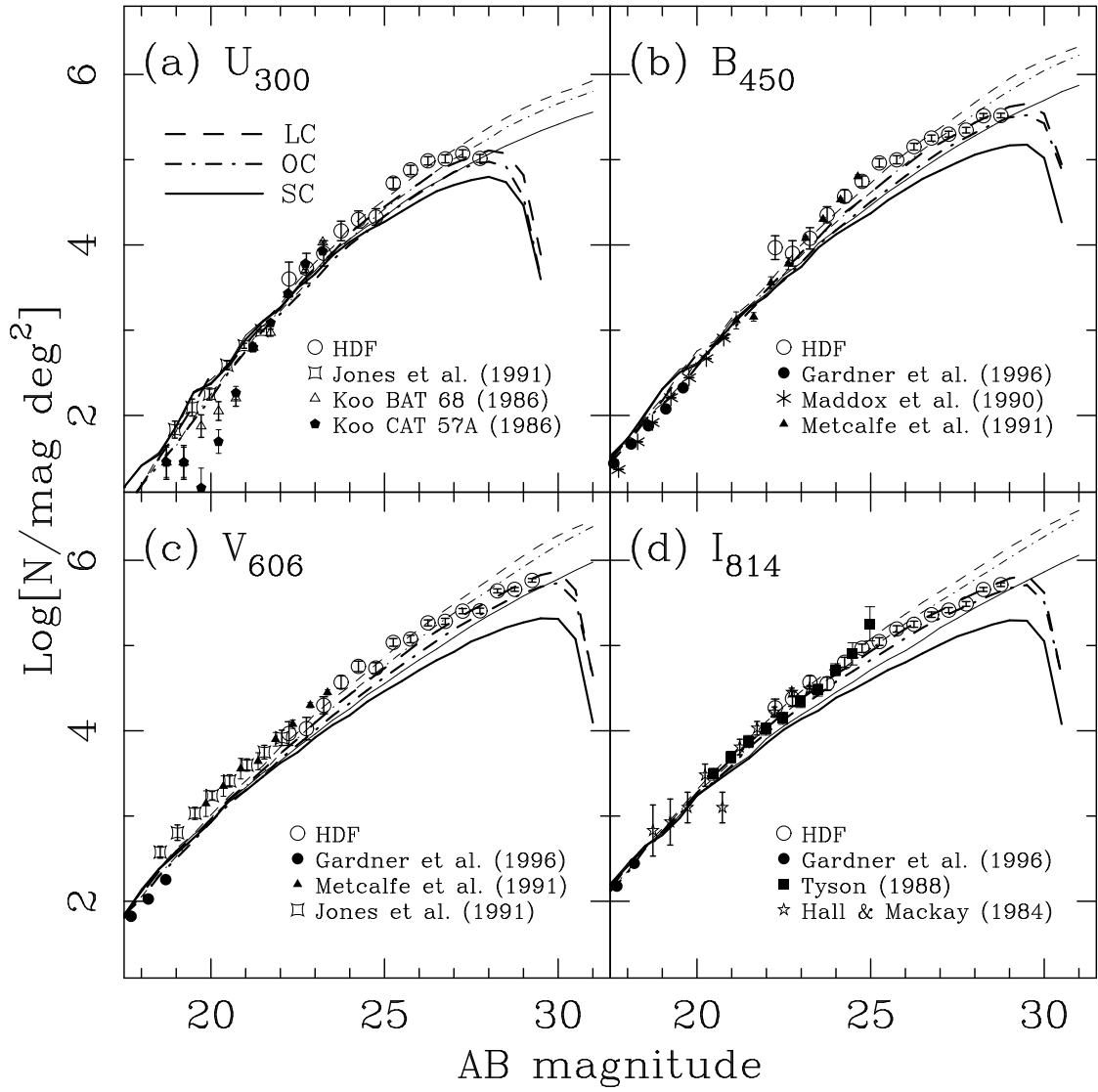


Figure 20: Optical galaxy counts in Hubble Deep Field (Nagashima et al. 2002)